Phaàn 1: Giải tích: Haøm nhieàu bieán, Tích phaân boäi hai

BAØI 1: ÑAÏO HAØM - VI PHAÂN -ÖÙNG DUÏNG

0. Ñaïo haøm rieâng:

0.1 Ñaïo haøm rieâng baäc cao:

0.1 Ñaïo haøm hôïp hôïp

Ñònh lyù (Schwarz):

Giaû söû z'_x, z'_y z''_{xy} toàn taïi vaø lieân tuïc thì coù z''_{yx} vaø $z''_{xy} = z''_{yx}$

1. Cöïc trò töï do haøm 2, 3 biến:

Ñònh lyù veà ñieàu kieän caàn: f = f(x,y) hay f = f(x, y, z) coù cöïc trò ñòa phöông taïi $M_0(x_0, y_0)$ $(M_0(x_0, y_0, z_0))$ vaø caùc ñaïo haøm rieâng toàn taïi ==> $M_0(x_0,y_0)$ $(M_0(x_0, y_0, z_0))$ laø ñieåm döøng.

Ñònh lyù veà ñieàu kieän ñuû: Neáu $M_0(x_0,y_0)$ laø ñieåm döøng, thì chöa chaéc $M_0(x_0,y_0)$ laø ñieåm cöïc trò, maø caàn phaûi coù theâm nhöõng ñieàu kieän cuï theå veà ñaïo haøm baäc hai nhö phöông phaùp sau:

Hai biến:

1/ $H_1 = f''_{xx} > 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0$ ==> f ñaït cöïc tieåu taïi X_0.

2/ $H_1 = f''_{xx} < 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0$ ==> f ñaït cöïc ñaïi taïi X_0.

Ba biến:

• Cöïc tieåu: (döông caû) $H_1 = f''_{xx} > 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0,\ H_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0$

• Cöïc ñaïi: (ñan daáu, baét ñaàu töø aâm)

$$H_1 = f''_{xx} < 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0,\ H_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0$$

Ñieàu kieän ñuû daïng vi phaân nhieàu bieán toång quaùt: $M_0(x_0, y_0, z_0)$) laø ñieåm döøng, xeùt daïng vi phaân $d^2 f(X_0)$:

a/ Laø xaùc ñònh döông $\left(d^2 f(X_0) > 0\right)$ thì f ñaït cöïc tieåu taïi X_0.

b/ Laø xaùc ñònh aâm $\left(d^2 f(X_0) < 0\right)$ thì f ñaït cöïc ñaïi taïi X_0.

c/ $\left(d^2 f(X_0) = 0\right)$ thì taïi X_0 chöa coù keát luaän. Phaûi xeùt vi phaân caáp 3...

Vi phaân caáp 2: f=f(x,y)

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2$$

Vi phaân caáp 2: f=f(x,y,z)

$$d^2f = f''_{x^2}dx^2 + f''_{y^2}dy^2 + f''_{z^2}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{xz}dxdz + 2f''_{yz}dydz$$

2. Cöc trò vöông ham 2 biến co 1 rang buoc: Cöc trò $f = f(x_1, x_2)$ va 1 rang buoc $j\,(x_1, x_2) = 0$

Ham Lagrange: $f(x_1, x_2, l\,) = f(x_1, x_2) + l\;j\,(x_1, x_2)$

Ñieu kien can: $f = f(x_1, x_2)$ ñat cöc trò tai M_0 thì M_0 thoa $\overset{uuu\;\;r}{Ñ}f = 0$ (giai he phöông trình nay ñe tìm M_0 la ñiem döng cua ham $f(x_1, x_2, l\,)$).

<u>*Ñònh ly ve ñieu kien ñu:*</u>

i/ $H_2 < 0$ Þ thì f ñat cöc tieu.

ii/ $H_2 > 0$ Þ thì f ñat cöc ñai.

Trong ño: $H_2 = \left|\begin{array}{c|cc} 0 & j'_x & j'_y \\ \hline j'_x & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ j'_y & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|cc} f''_{ll} & f''_{l\,x_1} & f''_{l\,x_2} \\ \hline f''_{l\,x_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{l\,x_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{array}\right|$

<u>*Ñieu kien ñu dang vi phan tong quat cho ham Lagrange* $\bar{f}$ *:*</u>

$f(x_1, x_2, l\,) = f(x_1, x_2) + l\;g\;(x_1, x_2)$, xet dang vi phan $d^2f(X_0)$:

a/ La xac ñònh döông $\left(d^2f(X_0) > 0\right)$ thì f ñat cöc tieu tai X_0.

b/ La xac ñònh am $\left(d^2f(X_0) < 0\right)$ thì f ñat cöc ñai tai X_0.

c/ $\left(d^2f(X_0) = 0\right)$ thì tai X_0 chöa co ket luan. Phai xet vi phan cap 3...

- Ta tính ham 2 bien: L(x, y, λ) = f(x, y) + λ φ (x, y)

  $d^2L = L''_{x^2}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{y^2}\,dy^2$. (*)

- Chu y: $j'_x\,dx + j'_y\,dy = 0$, $dx^2 + dy^2 > 0$
- Neu: $d^2L(x_0,y_0) > 0$ thì (x_0,y_0) la ñiem cöc tieu.
  $d^2L(x_0,y_0) < 0$ thì (x_0,y_0) la ñiem cöc ñai.
  $d^2L(x_0,y_0) = 0$ thì (x_0,y_0) khong la ñiem cöc trò.
- Töông tö ham 3 bien: L(x,y,z, λ) = f(x,y,z) + λ φ (x,y,z)

  Thì $d^2L = L''_{x^2}\,dx^2 + L''_{y^2}\,dy^2 + L''_{z^2}\,dz^2 + 2(L''_{xy}\,dxdy + L''_{xz}\,dxdz + L''_{yz}\,dydz)$

3. Cöc trò vöông ham 3 biến co 1 rang buoc:

Cöc trò $f = f(x_1, x_2, x_3)$ va rang buoc $g\;(x_1, x_2, x_3) = 0$

Ham Lagrange: $f(x_1, x_2, x_3, l\,) = f(x_1, x_2, x_3) + l\;g\;(x_1, x_2, x_3)$

<u>*Ñieu kien ñu dang vi phan tong quat ham Lagrange* $\bar{f}$ *:*</u>

$f(x_1, x_2, x_3, l\,) = f(x_1, x_2, x_3) + l\;g\;(x_1, x_2, x_3)$, xet dang vi phan $d^2f(X_0)$:

a/ La xac ñònh döông $\left(d^2f(X_0) > 0\right)$ thì f ñat cöc tieu tai X_0.

b/ La xac ñònh am $\left(d^2f(X_0) < 0\right)$ thì f ñat cöc ñai tai X_0.

c/ $\left(d^2f(X_0) = 0\right)$ thì tai X_0 chöa co ket luan. Phai xet vi phan cap 3...

<u>Ñieu kien ñu ve ñònh thöc Hess, xet 2 ñònh thöc:</u>

i/ $H_2 < 0$, $H_3 < 0 \Rightarrow$ thì f ñat cöc tieu.

ii/ $H_2 > 0$, $H_3 < 0 \Rightarrow$ thì f ñat cöc ñai.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{ll} & f''_{lx_1} & f''_{lx_2} \\ f''_{lx_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{lx_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix},$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{ll} & f''_{lx_1} & f''_{lx_2} & f''_{lx_3} \\ f''_{lx_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ f''_{lx_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3} \\ f''_{lx_3} & f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

4. Cöc trò vöông ham 3 biến co 2 rang buoc: Cöc trò $f = f(x_1, x_2, x_3)$ va 2 rang buoc

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}.$$

$$f(x_1, x_2, x_3, l_1, l_2) = f(x_1, x_2, x_3) + l_1 g_1(x_1, x_2, x_3) + l_2 g_2(x_1, x_2, x_3)$$

<u>Ñieu kien ñu ve ñònh thöc Hess, xet 2 ñònh thöc:</u>

xet 1 ñònh thöc H_3: $H_3 < 0$ thì CĐ va $H_3 > 0$ thì CT

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & f''_{l_1x_1} & f''_{l_1x_2} & f''_{l_1x_3} \\ 0 & 0 & f''_{l_2x_1} & f''_{l_2x_2} & f''_{l_2x_3} \\ f''_{l_1x_1} & f''_{l_2x_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ f''_{l_1x_2} & f''_{l_2x_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3} \\ f''_{l_1x_3} & f''_{l_2x_3} & f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g'_{1,x_1} & g'_{1,x_2} & g'_{1,x_3} \\ 0 & 0 & g'_{2,x_1} & g'_{2,x_2} & g'_{2,x_3} \\ g'_{1,x_1} & g'_{2,x_1} & f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ g'_{1,x_2} & g'_{2,x_2} & f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3} \\ g'_{1,x_3} & g'_{2,x_3} & f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

- Tööng töï ham 3 bien: $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\,\varphi(x,y,z)$

  Thì $d^2L = L''_{x^2}\,dx^2 + L''_{y^2}\,dy^2 + L''_{z^2}\,dz^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + 2L''_{xz}\,dxdz + 2L''_{yz}\,dydz$.

3.3 Cac ví du:

<u>Ví du 1:</u>

Tìm cac ñiem tôi han cua: $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Dung ñieu kien cap 2 cua ñao ham ñe phan biet ñiem Max va Min.

Giai: Giai 3 phöông trình: $f_x^{/} = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0$; $f_y^{/} = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0$;

$f_z^{/} = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 <=> \left\{ \dfrac{y}{2x} = \pm 1, \dfrac{y}{2x} = \dfrac{z^2}{y^2}, \dfrac{z}{y} = \dfrac{1}{z^2} \right\}$, vay y, x, z cung dau.

Khử y trong 3 phương trình ñe con phöông trình 2 bien x, z: $z^8=1 ==> z = \pm 1$.....

tìm ñöôc ñung 2 nghiem döng: M(1/2, 1, 1) va N(-1/2, -1, -1). Tính:

$$f_{xx}^{//} = \frac{y^2}{2x^3} \qquad f_{yy}^{//} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} \qquad f_{zz}^{//} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$$

$$f_{xy}^{//} = -\frac{y}{2x^2}, \qquad f_{xz}^{//} = 0 \qquad f_{yz}^{//} = \frac{-2z}{y^2}$$

+ Bay giô xet nghiem tai M(1/2, 1, 1):

Xet vi phan bac 2:

$$d^2 f = f_{xx}^{//}dx^2 + f_{yy}^{//}dy^2 + f_{zz}^{//}dz^2 + 2\left(f_{xy}^{//}dxdy + f_{xz}^{//}dxdz + f_{yz}^{//}dydz \right)$$

la mot dang toan phöông theo dx,dy. Ta co ma tran:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}^{//} & f_{xy}^{//} & f_{xz}^{//} \\ f_{yx}^{//} & f_{yy}^{//} & f_{yz}^{//} \\ f_{zx}^{//} & f_{zy}^{//} & f_{zz}^{//} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = H_3 = 32 > 0,\ H_1 = 4 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$d^2f(M) > 0$ (DTP xac ñònh döông) $\forall dx, dy$ => M(1/2, 1, 1) cöc tieu.

+ Bay giô xet nghiem tai N(-1/2, -1, -1)

$H_1 = -4 < 0$, $H_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}^{//} & f_{xy}^{//} & f_{xz}^{//} \\ f_{yx}^{//} & f_{yy}^{//} & f_{yz}^{//} \\ f_{zx}^{//} & f_{zy}^{//} & f_{zz}^{//} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = H_3 = -32 < 0,$$

Vay $d^2f(N) < 0$ (DTP xac ñònh am) $\forall dx, dy$

=> N(-1/2, -1, -1) cöc ñai.

Cach 2:

- Xet nghiem tai M(1/2, 1, 1):

  Ta tính tröc tiep tö vi phan bac 2:

  $$d^2 f = f_{xx}^{//}dx^2 + f_{yy}^{//}dy^2 + f_{zz}^{//}dz^2 + 2\left(f_{xy}^{//}dxdy + f_{xz}^{//}dxdz + f_{yz}^{//}dydz \right)$$ la:

  $d^2 f = 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 4dydz$, sau mot so tính toan :

  $d^2 f = 4\left(dx - \dfrac{dy}{2} \right)^2 + 2(dy - dz)^2 + 4dz^2 > 0$ ==> M(1/2, 1, 1) CT

- Xet nghiem tai N(-1/2, -1, -1):

  Ta tính tröc tiep tö vi phan bac 2:

$$d^2 f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2\left(f''_{xy}dxdy + f''_{xz}dxdz + f''_{yz}dydz\right)$$ la:

$d^2 f = -4dx^2 - 3dy^2 - 6dz^2 + 4dxdy + 4dydz$, sau mot so tính toan :

$d^2 f = -4\left(dx - \dfrac{dy}{2}\right)^2 - 2\left(dy - dz\right)^2 - 4dz^2 < 0$ =>N(-1/2, -1, -1) CÑ ¢

Ví du 2: Xet lai ví du tröôc ñay: Ham: z=f(x,y) = $x^3 + y^3 - 3xy$

- Tìm tap cac ñiem döng:

  $z'_x = 3x^2 - 3y = 0$

  $z'_y = 3y^2 - 3x = 0$

Giai he nay ta co 2 ñiem döng la $M_1(1,1)$ va $M_2(0,0)$

- Ta co: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$

  Va vi phan cap 2: $d^2 f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + 2f''_{xy}dxdy$

♣ Tai M_1: $d^2 f = 6dx^2 + 6dy^2 - 6dxdy = 6\left(dy - \dfrac{dx}{2}\right)^2 + \dfrac{9dx^2}{2} > 0$,

nen M_1 la ñiem cöc tieu.

Co the thay bang $H_1 = 6>0$, $H_2 = 36 - 9 > 0$

♣ Tai M_2: $d^2 f = -3dxdy = ?$ co the am, co the döông,

nen M_2 khong la ñiem cöc trò. Co the thay bang $H_2 = -9<0$. ¢

Ví du 3:

Tìm cac ñiem cöc trò cua: $f\left(x, y, z\right) = x + \dfrac{2y}{x} + \dfrac{z}{2y} + \dfrac{1}{z}$,

Giai: $D = R^3 - \left\{\left(0,0,0\right)\right\}$. Giai 3 phöông trình: $f'_x = 1 - \dfrac{2y}{x^2} = 0$; $f'_y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{z}{2y^2} = 0$;

$f'_z = \dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{z^2} = 0 <=> \left\{x^2 = 2y, 4y^2 = xz, z^2 = 2y\right\}$,

Vay y> 0, x va z bang nhau va cung dau. Giai ra:

Tìm ñöôc ñung 2 nghiem döng: M(1, 1/2, 1) va N(-1, 1/2, -1).

Tính: $f''_{xx} = \dfrac{4y}{x^3}$ $\quad f''_{yy} = \dfrac{z}{y^3}$ $\quad f''_{zz} = \dfrac{2}{z^3}$

$f''_{xy} = -\dfrac{2}{x^2}$, $\quad f''_{xz} = 0$ $\quad f''_{yz} = \dfrac{-1}{2y^2}$

+ Bay giô xet nghiem tai M(1, 1/2, 1):

Xet vi phan bac 2:

$$d^2 f = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2\left(f''_{xy}dxdy + f''_{xz}dxdz + f''_{yz}dydz\right)$$

la mot dang toan phöông theo dx, dy, dz. Ta co ñònh thöc ma tran Hess:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = H_3 = 16 > 0,\ H_1 = 2 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$d^2f(M) > 0$ (DTP xac ñònh döông) $\forall dx, dy, dz$ => M(1, 1/2, 1) cöïc tieu.

<u>*Cach khac:*</u> $d^2 f = 2dx^2 + 8dy^2 + 2dz^2 - 4dxdy - 4dydz =$

$= 2(dx - dy)^2 + 4dy^2 + 2(dz - dy)^2 > 0$ => M(1, 1/2, 1) cöïc tieu.

+ Bay giô xet nghiem tai N(-1, 1/2, -1)

$H_1 = -2 < 0$, $H_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 12 > 0$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = H_3 = -16 < 0,$$

Vay $d^2f(N) < 0$ (DTP xac ñònh am) $\forall dx, dy, dz$

=> N(-1, -1/2, -1) cöïc ñai.

<u>*Cach khac:*</u> $d^2 f = -2dx^2 - 8dy^2 - 2dz^2 - 4dxdy - 4dydz =$

$= -2(dx + dy)^2 - 4dy^2 - 2(dz + dy)^2 < 0$ => N(-1, -1/2, -1) cöïc ñai. ¢

<u>*Ví du 5:*</u> Tìm cöïc trò cua f(x, y, z) =2x+y+3z.

Vôi ñieu kien: g(x,y,z) = $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35$ =0.

+ <u>*Cach 1:*</u>

Ham Lagrange: $L = f + \lambda g = 2x + y + 3z + \lambda\left(x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35\right)$

$$L'_x = 2 + 2\lambda x,\ L'_y = 1 + 8\lambda y,\ L'_z = 3 + 4\lambda z,\ L'_\lambda = x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 35$$

$$L''_{xx} = 2\lambda,\ L''_{yy} = 8\lambda,\ L''_{zz} = 4\lambda,\ L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = 0,\ L''_{xz} = 0,\ L''_{yz} = 0,\quad L''_{x\lambda} = 2x,\ L''_{y\lambda} = 8y,\ L''_{z\lambda} = 4z$$

$$\overrightarrow{\nabla L} = \vec{0} \Leftrightarrow M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = \frac{-1}{4}\right),\quad M_2\left(-4, -\frac{1}{2}, -3, \lambda = \frac{1}{4}\right)$$

co hai ñiem döøng. Xet vi phan bac 2 .

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2\left(L''_{xy}dxdy + L''_{xz}dxdz + L''_{yz}dydz\right)$$

la mot dang toan phöông theo 3 bien: dx,dy,dz. Chöùng minh ñieu nay töông tö nhö tröôøng hôïp 2 bien.

- Xet vi phan bac 2 tai $M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, \lambda = \frac{-1}{4}\right)$, f=17.5

$$d^2L\Big|_{M_1} = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 = -\frac{1}{2}dx^2 - 2dy^2 - dz^2 < 0$$

Neân $M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, l = \frac{-1}{4}\right)$ laø CÑ.

- Xeùt vi phaân baäc 2 taïi $M_2\left(-4, -\frac{1}{2}, -3, l = \frac{1}{4}\right)$, f= -17.5

$$d^2L\Big|_{M_2} = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 = \frac{1}{2}dx^2 + 2dy^2 + dz^2 > 0$$

Neân $M_2\left(-4, -\frac{1}{2}, -3, l = \frac{1}{4}\right)$ laø CT.

+ *Caùch 2:* Duøng ñònh thöùc, xeùt 2 ñònh thöùc (n=3,m=1).

Taïi $M_1\left(4, \frac{1}{2}, 3, l = \frac{-1}{4}\right)$, $(-1)^k H_k > 0$, $k = \overline{m+1, n} = \overline{2, 3}$, thaät vaäy:

Ta xeùt: $H_2 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ =136 > 0

$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ g'_z & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 & 12 \\ 8 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = -280 <0, Taïi M_1 CÑ.

Töông töï taïi $M_2\left(-4, -\frac{1}{2}, -3, l = \frac{1}{4}\right)$, CT. Thaät vaäy:

Ta xeùt: $H_2 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -8 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = -136 <0

$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ g'_z & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -4 & -12 \\ -8 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = -280<0, taïi M_2 CT. ¢

Ví duï 6: Laáy ví duï tröôùc z = xy, thoûa φ(x,y) = $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$

L = z + λ. φ = xy + λ $[(x-1)^2 + y^2 - 1]$

Ta xeùt 2 ñieåm döøng $M_1(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, l = \frac{-\sqrt{3}}{2})$ vaø $M_2(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, l = \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$L''_{x^2} = 2l = L''_{y^2}$, $L''_{xy} = 1$, $L''_{xl} = 2(x-1) = j'_x$, $L''_{yl} = 2y = j'_y$

•Tai M$_1$($\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $l = \frac{-\sqrt{3}}{2}$), z= 1.299,

Ta xet: $H_2 = \begin{vmatrix} 0 & j'_x & j'_y \\ j'_x & a_{11} & a_{12} \\ j'_y & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 6\sqrt{3}$ >0, M$_1$ la CÑ

•Tai M$_2$($\frac{3}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$), z= -1.299,

Ta xet: $H_2 = \begin{vmatrix} 0 & j'_x & j'_y \\ j'_x & a_{11} & a_{12} \\ j'_y & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -6\sqrt{3}$ >0, M$_2$ la CT

•Tai M$_0$(0, 0, l bat ky), Ta xet:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & j'_x & j'_y \\ j'_x & a_{11} & a_{12} \\ j'_y & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2l & 1 \\ 0 & 1 & 2l \end{vmatrix} = -8l$$, M$_0$ chöa co ket luan ¢

Ví du 7: Lay ví du tröôc z = xy, thoa φ(x,y) = 3x+2y – 5 = 0

L = f + λ. φ = xy + λ [3x+2y – 5]

Co 1 ñiem döng duy nhat M($\frac{5}{6}$, $\frac{5}{4}$, $l = \frac{-5}{12}$).

$L''_{x^2} = 0 = L''_{y^2}$, $L''_{xy} = 1$, $L''_{xl} = 3 = j'_x$, $L''_{yl} = 2 = j'_y$.

Tai M($\frac{5}{6}$, $\frac{5}{4}$, $l = \frac{-5}{12}$), z=25/24,

Ta xet: $H_2 = \begin{vmatrix} 0 & j'_x & j'_y \\ j'_x & a_{11} & a_{12} \\ j'_y & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$ >0, M la CÑ ¢

Chöông 2

TÍCH PHAN BOI 2 (KEP)

BAI 1: BAI TOAN MÔ ÑAU

1.1 Bai toan mô ñau :

Ta nhô lai rang, tích phan xac ñònh hay tích phan ñôn phat xuat tö bai toan tính dien tích va tích phan kep lai xuat phat tö bai toan tính the tích nhö sau :

Can tính the tích cua hình co ñay phang la mien D ⊂ Oxy, ñöông sinh song song vôi truc oz, mat tren la mat cong xac ñònh bôi ham

z = z(x,y), vôi M(x,y) ∈ D. Ta chia mien D thanh n phan, dien tích moi phan la Δ(S$_i$), cot the tích co dien tích ñay

$\Delta(S_i) \ni M_i(x_i,y_i)$, vaäy caû theå tích laø :

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta S_i) f(M_i) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta S_i) f(x_i, y_i)$$

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} V_n,$$ vôùi d_i = dia(ΔS_i) = baùn kính cuûa ΔS_i

chuù yù : $\max d_i \to 0 \;\Rightarrow\; n \to \infty$

1.2 Ñònh nghóa :

Giôùi haïn treân neáu toàn taïi höõu haïn (khoâng phuï thuoäc vaøo caùch chia mieàn D) ñöôïc goïi laø tích phaân keùp cuûa haøm z = f(x,y) treân mieàn D, khi ñoù ta noùi f khaû tích treân mieàn D vaø kyù hieäu noù laø

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

<u>Nhaän xeùt</u> :

1) Theo ñònh nghóa neáu f(x,y) = 1 $\forall(x,y) \in$ D thì $\iint_D 1\,dxdy = S(D)$ (dieän tích mieàn D).
2) f(x,y) > 0, lieân tuïc $\forall(x,y) \in$ D thì $\iint_D f(x,y)\,dxdy = V(D)$ laø theå tích hình truï coù caùc ñöôøng sinh song song vôùi Oz, hai ñaùy giôùi haïn bôûi z= 0, z= f(x,y).

1.3 Tính chaát cuûa tích phaân keùp :

Caùc tính chaát cuûa tích phaân keùp cuõng gioáng nhö tính chaát cuûa tích phaân xaùc ñònh.

<u>Tính chaát 1</u> : f lieân tuïc trong D thì f khaû tích treân D

<u>Tính chaát 2</u> : coù tính tuyeán tính

$$\iint_D (f+g)\,dxdy = \iint_D f\,dxdy + \iint_D g\,dxdy$$

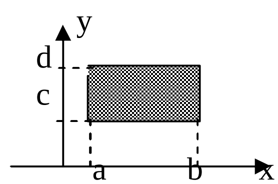
$$\iint_D Kf\,dxdy = K\iint_D f\,dxdy \quad , K \in R$$

<u>Tính chaát 3</u> : neáu $D = D_1 \cup D_2$ vaø $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ thì

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

BAØI 2: PHÖÔNG PHAÙP TÍNH TÍCH PHAÂN KEÙP

2.1 Trong heä truïc Descartes.



- *Mieàn D laø hình chöõ nhaät :*

$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\} = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Vaäy vôùi mieàn laø hình chöõ nhaät ta coù theå hoaùn vò caän .

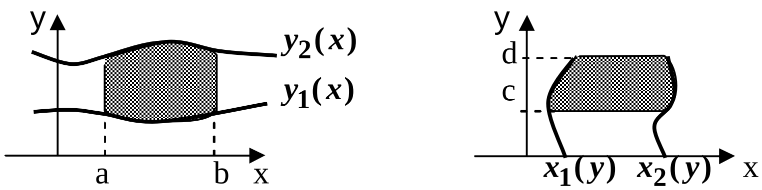
<u>Ví duï</u> : D = [0,1]$\times$[1,2]

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{7}{3}\right)dx = \frac{8}{3},$$ hoaëc

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2)dx\right)dy = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Big|_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} + y^2\right)dy = \frac{y}{3} + \frac{y^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

- *Mieàn D laø mieàn baát kyø :*



- D = { (x,y) : a ≤ x ≤ b, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ } = [a,b] × [$y_1(x)$, $y_2(x)$]

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy$$

- D = { (x,y) : c ≤ y ≤ d, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$ } = [$x_1(y)$, $x_2(y)$] × [c,d]

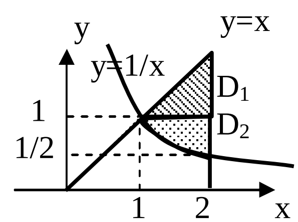
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{y=d} dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)dx$$

- Neáu D laø mieàn phöùc taïp thì phaûi phaân D ra thaønh nhöõng mieàn ñôn giaûn nhö treân

<u>*Ví duï 1 :*</u> tính $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$

D=$D_1 \cup D_2$

Vôùi D giôùi haïn bôûi 3 ñöôøng sau : $x = 2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x$



<u>caùch 1</u> : $I = \int_1^2 dx \int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy = \frac{9}{4}$

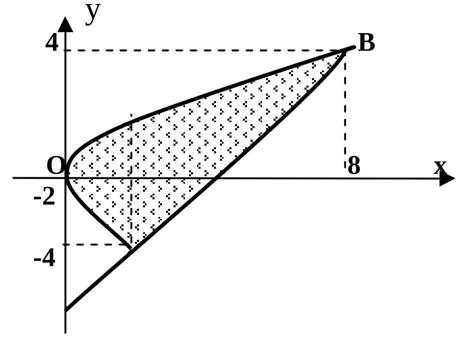
<u>caùch 2</u> : $I = \iint_{D_2} + \iint_{D_2}$ vì D = $D_1 \cup D_2$ vaø $D_1 \cap D_2 = \varnothing$

$$\iint_{D1} = \int_{y=1}^{y=2} dy \int_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{-8}{3y} - \frac{y^2}{6}\Big|_1^2 = \frac{5}{6}$$

$$\iint_{D2} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{x=\frac{1}{y}}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{-8}{3y} + \frac{1}{12} y^{-4}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{8}{3} - \frac{15}{12}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{5}{6} + \frac{8}{3} - \frac{15}{12} = \frac{9}{4}$$

<u>*Ví duï 2 :*</u> Tính $I = \iint_D xydxdy$,



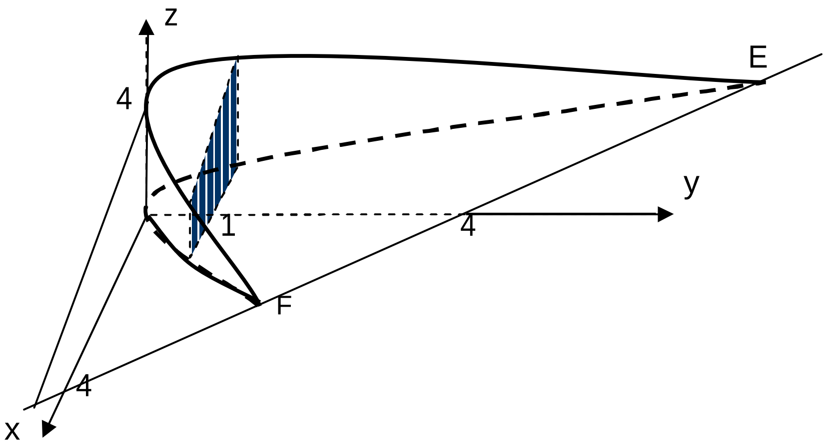
D giôùi haïn bôûi
2 ñöôøng y = x – 4 vaø $y^2 = 2x$,
Tính giao ñieåm ta coù :

giao ñiem : A(2,-2), B(8,4)

$$I=\int_{-2}^{4}dy\int_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=y+4}xydx=\int_{-2}^{4}\left(y\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8}{3}y^3+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Big|_{-2}^{4}=90$$

Cach 2 : ñoi can danh cho ban ñoc coi nhö bai tap.

_Ví du 3 :_ Tính the tích khoi, ñöôc giôi han bôi cac mat z= 4-x-y va $z \ge 0$, $y=x^2$, $y \le 1$.



$$V_2=\iint_D (4-x-y)dxdy=\int_{y=0}^{y=1}dy\int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}}(4-x-y)dx=\int_{y=0}^{y=1}(8\sqrt{y}-2y^{\frac{3}{2}})dy=\frac{68}{15}$$

Cach 2: Ñoi can khac: $V_2=\int_{x=-1}^{x=1}dx\int_{y=x^2}^{y=2}(4-x-y)dy=\frac{68}{15}$

_Ví du 4 :_ Tính the tích mien V, ñöôc giôi han bôi cac ñöông z= 4-x-y va $z \ge 0$, $y=x^2$, $y \ge 1$.

Danh cho Hoc Sinh kiem tra chi tiet. Tính giao ñiem ta co hai giao ñiem :

$x_F=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, x_E=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, the tích mien V can tính:

V= V_1 - V_2, (V_2 la ket qua tren), ta can tính V_1 la the tích co ñay la parabol $y=x^2$.

$$V_1=\iint_{V_1}(4-x-y)dxdy=\int_{x=x_E}^{x=x_F}dx\int_{y=x^2}^{y=-x+4}(4-x-y)dy=$$

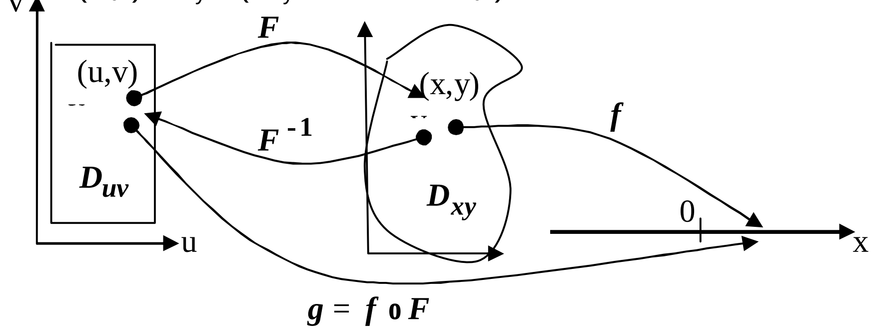
$$=\int_{x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}}^{x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}\left(-4x+8-\frac{7}{2}x^2+x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{289}{60}\sqrt{17}$$

2.2 Phöông phap ñoi bien :

Xet $I=\iint_D f(x,y)dxdy$, bay giô ñat van ñe ñoi bien trong tích phan kep co gì môi so vôi tích phan ñôn ña hoc, muc ñích la : vì lay tích phan tren mien D_{xy} qua phöc tap nen ta bien ve mien D_{uv} ñôn gian nhö cac hình chö nhat chang han, luc ño lay tích phan rat ñôn gian.

$D_{xy} \ni (x,y) \leftrightarrow (u,v) \in D_{uv}$ pheùp bieán ñoåi naøy 1 – 1 neân noù coù pheùp bieán ñoåi ngöôïc : $F(u,v)=(x,y)$ vaø $F^{-1}(x,y)=(u,v)$, vaø coù :

$F(D_{uv})=D_{xy}$ (D_{xy} laø aûnh cuûa D_{uv})



luùc ñoù haøm soá f: $D_{xy} \to R$, tích phaân cuûa haøm soá f(x,y) treân D_{xy}, ñöôïc ñoåi bieán nhö sau:

$$\iint_{D_{xy}=F(D_{uv})} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv =$$

$$= \iint_{D_{uv}} f_0F(u,v).\left|\det\left(J_F(u,v)\right)\right|dudv = \iint_{D_{uv}} g(u,v).\left|\det\left(J_F(u,v)\right)\right|dudv$$

trong ñoù J_F laø Jacobi cuûa pheùp bieán ñoåi .

$$\det\left(J_F(u,v)\right) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$$

Ví duï 1 : Hình chöõ nhaät A(1,2), B(1,5), C(3,5), D(3,2), ñöôïc bieán hình qua pheùp bieán ñoåi tuyeán tính coù matraän töông öùng laø :

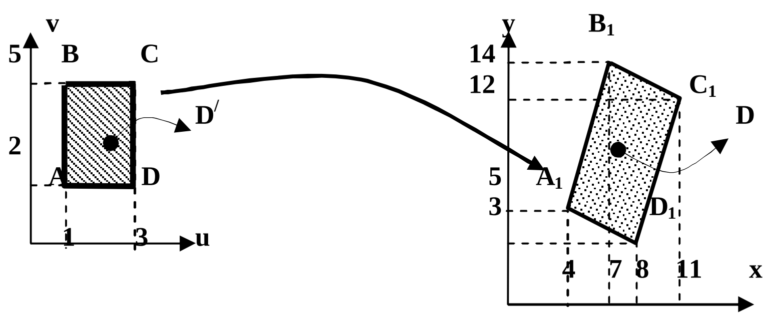
$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, tìm dieän tích $A_1B_1C_1D_1$ bieán hình qua PBÑTTT. G treân. Xem hình döôùi.

Deã daøng kieåm chöùng qua PBÑTT. G ta coù $A_1(4,5)$, $B_1(7,14)$, $C_1(11,12)$, $D_1(8,3)$, dieän tích ABCD=2.3=6. qua lieân heä toïa ñoä :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = J = \det(G) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

Vaäy dieän tích môùi laø :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D 1.dxdy = \iint_{D'} |J|.dudv = 7\iint_{D'} dudv = 7 \times 6 = 42$$



Ta coù theå kieåm chöùng keát quaû qua coâng thöùc ôû hình giaûi tích nhö sau:

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i y_{i+1}-y_i x_{i+1}\right)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & 8 & 11 & 7 & 4\\ 5 & 3 & 12 & 14 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}[(4.3-5.8)+(8.12-3.11)+(11.14-12.7)+(7.5-14.4)]=\frac{84}{2}=42.$$

Ta coù theå giaûi baèng coâng thöùc baèng excel, hay Vinacal-570MS

4	8	11	7	4	
5	3	12	14	5	
	-28	63	70	-21	84

¢

Ví duï 2 : Hình chöõ s nhoû coù 10 toïa ñoä: ñieåm 10 truøng ñieåm 1 nhö sau:

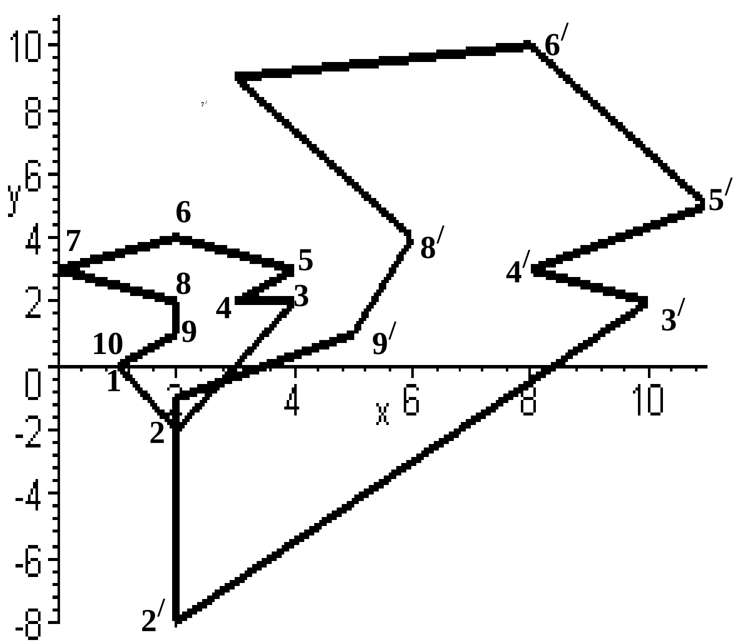
TT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	4	3	4	2	0	2	2	1
y	0	-2	2	2	3	4	3	2	1	0

ñöôïc bieán hình qua pheùp bieán ñoåi tuyeán tính coù ma traän töông öùng laø :

$G=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, tìm dieän tích S lôùn qua bieán hình PBÑTTT. G treân. Xem hình.

Giaûi:

TT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	S
x	1	2	4	3	4	2	0	2	2	1	
y	0	-2	2	2	3	4	3	2	1	0	
$x_i y_{i+1}-y_i x_{i+1}$	-2	12	2	1	10	6	-6	-2	-1	20	



Dieän tích: $s=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i y_{i+1}-y_i x_{i+1}\right)=\frac{1}{2}\times 20=10$ (giaûi excel, haøng 3)

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=G\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\Rightarrow J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=J=\det(G)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=7;$$

Vaäy dieän tích môùi laø :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D 1.dxdy = \iint_{D'} |J|.dudv = 7\iint_{D'} dudv = 7\times 10 = 70.$$

Cach khac: Qua phep bien hình ta tìm cac toa ño cua hình S lôn mhö sau (nhö hình ve ô tren). Do nhan hai ma tran sau ta co ñænh cua hình S la:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

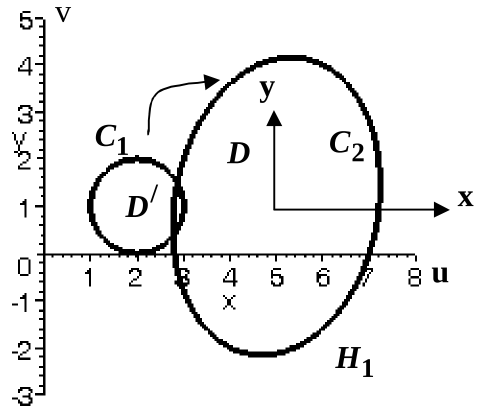
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 8 & 11 & 8 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ -1 & -8 & 2 & 3 & 5 & 10 & 9 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ Vay toa ño hình S lôn la:

TT	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$5'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$	$10'$	S
x	2	2	10	8	11	8	3	6	5	2	
y	-1	-8	2	3	5	10	9	4	1	-1	
$x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$		-14	84	14	7	70	42	-42	-14	-7	140

Dien tích: $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}\right) = \frac{1}{2}\times 140 = 70$ (gai excel, hang 3)

¢

_Ví du 3 :_ Hình tron $C_1 : (u-2)^2 + (v-1)^2 = 1$, ñöôc bien hình qua phep bien ñoi tuyen tính co matran töông öng la : $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, tìm dien tích hình ellip la bien hình qua PBÑTTT. G tren.



Vay dien tích môi la :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D 1.dxdy = \iint_{D'} |J|.dudv = 7\iint_{D'} dudv = 7\times\left(1^1.\pi\right) = 7\pi$$

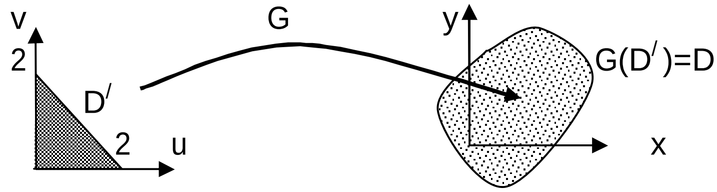
Cach 2: Vong tron C_1 bien thanh ellip C_2 qua PBÑTT: Xem hình tren.

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = -u + 3v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{7}(3x - y) \\ v = \frac{1}{7}(x + 2y) \end{cases}, \; C_2 : \frac{10}{49}x^2 - \frac{2}{49}xy - 2x + \frac{5}{49}y^2 + 4 = 0$$

Sau PBÑ tröc giao ta ñöa ve dang ellip : $5Y^2 + \frac{49}{5}X^2 = 49$ hay

$$\frac{X^2}{\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1$$, thì dien tích la: $S = \pi ab = \pi\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = 7\pi$.

<u>*Ví du 4 :*</u> Mien $D^{/}$ la hình tam giac O(0,0), A(2,0), B(0,2), ñöôc bien hình qua phep bien ñoi phi tuyen G: (x,y)=G(u,v)=(u+v, u^2-v). Tính tích phan cua ham: $\boldsymbol{f(x,y)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\boldsymbol{y}}}$, tren mien bien hình G($D^{/}$).



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ u^2-v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} =$$

$$= \boldsymbol{J} = \det(\boldsymbol{G}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -(1+2u);$$

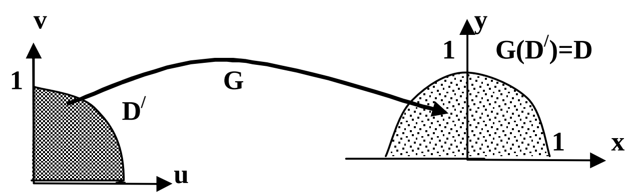
Vay :

$$\iint\limits_{D=G(D^{/})} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{1+4(u+v)+4(u^2-v)}}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D^{/}} \frac{1}{2u+1}|J|.dudv = \iint\limits_{D^{/}} \frac{1+2u}{1+2u}dudv = \iint\limits_{D^{/}} 1.dudv = \frac{1}{2}2\times 2 = 2 \qquad \blacksquare$$

<u>*Ví du 5 :*</u> Mien $D^{/}$ la phan tö hình tron ñôn vò trong mp Ouv, ñöôc bien hình qua phep bien ñoi phi tuyen G: (x,y)=G(u,v)=(u^2-v^2, 2uv). Tính tích phan cua ham: $\boldsymbol{f(x,y)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}}$, tren mien bien hình G($D^{/}$).

Mot phan tö vong tron qua phep bien ñoi G trô thanh mot nöa vong tron nhö hình ve



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2-v^2 \\ 2uv \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} =$$

$$J = \det(G) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2+v^2);$$ Vay :

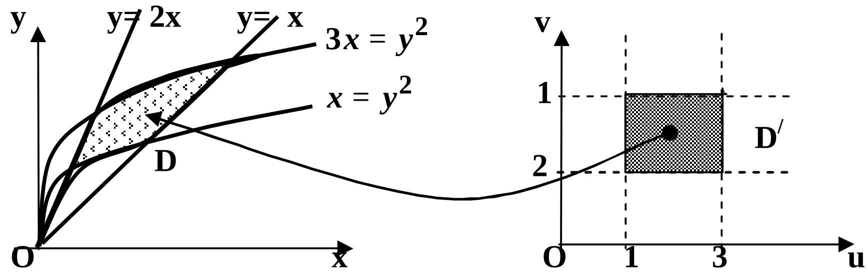
$$\iint\limits_{D=G(D^{/})} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}}.dxdy = \iint\limits_{D^{/}} \frac{1}{u^2+v^2}|J|.dudv =$$

$$= 4\iint\limits_{D^{/}} \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2}dudv = 4\iint\limits_{D^{/}} 1.dudv = 4\times\frac{\pi.1^2}{4} = \pi$$

Cach khac: $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int\limits_{r=0}^{r=1} \frac{1}{r}rdrd\varphi = \pi \qquad \blacksquare$

Ví du 6 : $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$ D la mien cong giôi han bôi bon ñöông

$y^2 = x,\quad y = x,\quad y^2 = 3x,\quad y = 2x$



ñoi bien ñat $u = \dfrac{y^2}{x}$, $v = \dfrac{y}{x}$, roi rang ta co ngay tö giôi han mien D la :

$1 \le u \le 3$ va $1 \le v \le 2$ va Jacobi co phep bien ñoi nay la :

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{x^3}{y^2} = \frac{u}{v^4}$$

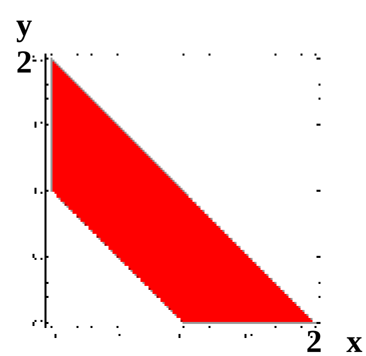
neu lam phöc tap hôn ta co the tính: $y = \dfrac{u}{v}$, $x = \dfrac{u}{v^2}$ Þ $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2} & \dfrac{-2u}{v^3} \\ \dfrac{1}{v} & \dfrac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = \dfrac{u}{v^4}$

Vay $I = \iint\limits_D xy\,dxdy = \iint\limits_{D'} \dfrac{u}{v^2}\,.\dfrac{u}{v}\,.\dfrac{u}{v^4}\,dudv = \int_1^3 u^3 du\,.\int_1^2 \dfrac{dv}{v^7} = \dfrac{105}{32}$ ¢

Ví du 7 :

Mien Q giôi han bôi 4 ñiem (0,1), (0,2), (2,0) va (1,0),

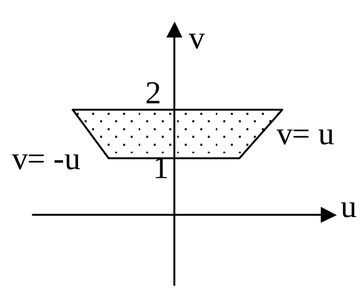
hay tính $I = \iint\limits_Q e^{(y-x)/(y+x)}\,dxdy$



Giai:

Ñat $u = (y - x)$, $\quad v = (y + x)$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$$



Mien lay tích phan oxy,

ñöôc bien thanh mien ouv nhö hình ve.

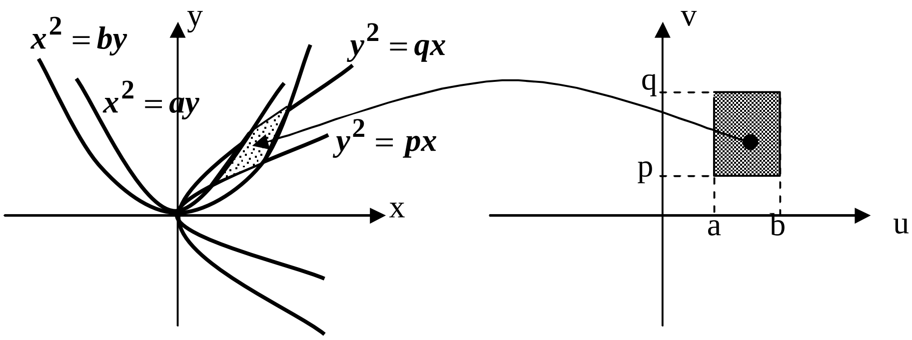
Nen

$I = \iint\limits_{Q_{xy}} e^{(y-x)/(y+x)}\,dxdy = \dfrac{1}{2}\iint\limits_{Q_{uv}} e^{u/v}\,dudv =$

$$= \frac{1}{2}\int_{v=1}^{v=2} dv \int_{u=-v}^{u=v} e^{u/v} du = \frac{3}{4}\left(e - e^{-1}\right)$$

<u>*Ví dui 8 :*</u> Tính diein tích miein D giôi hain bôi

$y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$ vôi $0 < p < q$, $0 < a < b$

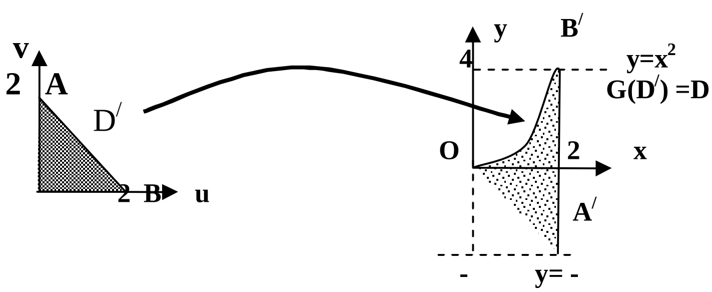


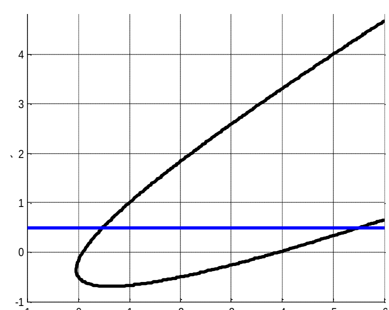
ñait $y^2 = vx$, $x^2 = uy$; $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{-2x}{y} & \dfrac{-x^2}{y^2} \\ \dfrac{-y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{|4-1|} = \dfrac{1}{3}$

vaiy $S = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_a^b du \, . \int_p^q dv = \frac{1}{3}(b-a)(q-p)$. ¢

<u>*Ví dui 9 :*</u> Miein $D^{/}$ lai hình tam giaic O(0,0), A(2,0), B(0,2), ñöôic biein hình qua pheip biein ñoii phi tuyein G: $(x,y)=G(u,v)=(u+v, u^2-v)$. Tính diein tích miein biein hình $G(D^{/})$.

Giai:





$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ u^2 - v \end{bmatrix} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} =$$

$$= J = \det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -(1+2u);$$

Vaiy : S= $\displaystyle\iint_{D=G(D^{/})} 1dxdy = \iint_D |J|.dxdy = \iint_{D^{/}} (1+2u).dudv =$

$$= \left(\frac{1}{2}.2.2\right) + 2\left(\int_{u=0}^{u=2} udu \int_{v=0}^{v=2-u} dv\right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

Caich 2: tam giaic vuoing cain OAB bein truic Ouv ñöôic biein thainh miein kín bein truic Oxy. ñieim A(u=0, v=2) biein thainh $A^{/}$ (x=2, y= -2), ñieim

B(u=2, v=0) bieán thaønh B/ (x=2, y=4), ñoaïn thaúng AB bieán thaønh ñöôøng thaúng x=2, ñoaïn OB (v=0) bieán thaønh cung OB/ parabol y=x^2 , ñoaïn OA (u=0) bieán thaønh döôøng OA/ y= -x.

Vaäy S= $\left(\int_{x=0}^{x=2} dx \int_{y=-x}^{y=x^2} dy\right) = \dfrac{14}{3}$

Töø ví duï naøy, ta coù theå tính laïi ví duï 4 ôû tröôùc:

$$\iint_{D=G(D')} f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=-x}^{y=x^2} \frac{dxdy}{\sqrt{1+4x+4y}} = \int_{x=0}^{x=2}\left[\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}\right]dx = 2 \qquad ¢$$

Ví duï 10 : Tính dieän tích giôùi haïn bôûi 2 ñöôøng sau:

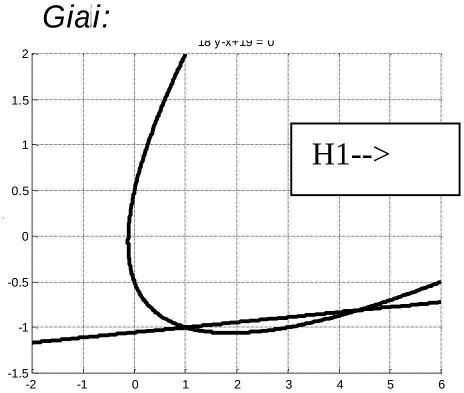
$$\begin{cases}(1): 2x^2 + 8y^2 - 8xy - 16x - 2 = 0\\ (2): 18y - x + 19 = 0\end{cases}.$$

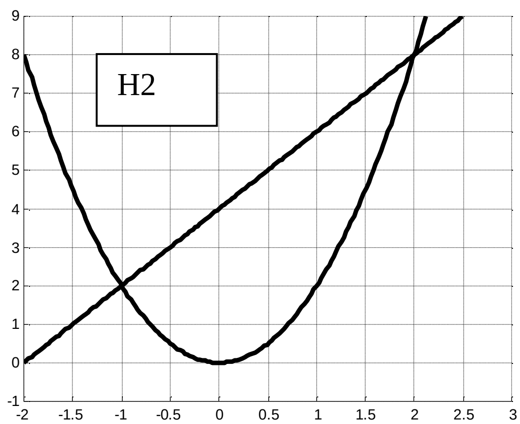
Töø (1) ta coù theå vieát laïi: $2(x - 2y - 4)^2 = 32y + 34 \Leftrightarrow v = 2u^2$, vì

ñaët $u = x - 2y - 4$, $v = 32y + 34$, theá vaøo (2) ta coù: v=2u+4, Tính J=$\dfrac{1}{32}$

vaäy $S = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \dfrac{1}{32} dudv = \dfrac{1}{32} \int_{u=-1}^{u=2} du \int_{v=2u^2}^{v=2u+4} dv = \dfrac{9}{32}$. ¢

Giaûi:





Ví duï 11 : Tính dieän tích giôùi haïn bôûi 2 ñöôøng

sau: $\begin{cases}(1): 3x^2 + 12y^2 - 12xy - 12x + 8y + 1 = 0\\ (2): y = -\frac{1}{2}\end{cases}$.

Giaûi:

Duøng phöông phaùp Lagrange ta ñöa (1) veà $3(x - 2y - 2)^2 = 16y + 11$

Ñaët $\begin{cases}u = x - 2y - 2\\ v = 16y + 11\end{cases}$ ==> $3u^2 = v$, ñöa (2) veà $v = 3$, $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 16\end{vmatrix}} = \dfrac{1}{16}$, giao

ñieåm: $3u^2 = v$, vaø $v = 3$

laø u=-1, u=1, vaäy S=$|J|\int\limits_{u=-1}^{u=1}\left(3-3u^2\right)du=\frac{1}{16}4=\frac{1}{4}$ ¢

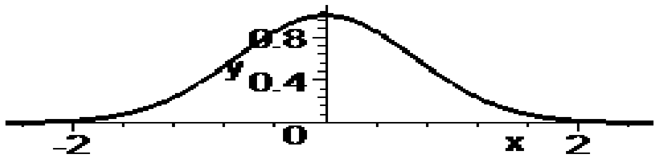
Ví duï 6 : Tính tích phaân suy roäng: $\boxed{I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}}$, ta coù theå xem

$I^2=\left(\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int\limits_{y=-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\right)=\int\limits_{y=-\infty}^{y=\infty}\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, mieàn laáy tích phaân ôû ñaây laø voøng troøn taâm O, baùn kính laø voâ haïn $R=\infty$

$$I^2=\int\limits_{y=-\infty}^{y=\infty}\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int\limits_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int\limits_{r=0}^{r=\infty}e^{-r^2}rdrd\theta=$$

$=2\pi\left(-\frac{e^{-u}}{2}\right)\Bigg|_{u=0}^{u=\infty}=\pi\Rightarrow I=\sqrt{\pi}$, töø ñaây suy ra, neáu ta tònh tieán thì:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2}dx=\sqrt{\pi}}$$



Ví duï 7 : Tính $\boxed{I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}}$, do ñoåi bieán moät tí.

Ví duï 8 : Tính $I=\int\limits_{y=-\infty}^{\infty}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}e^{\left(-x^2-y^2+xy\right)}dxdy=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

$$I=\int\limits_{y=-\infty}^{\infty}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}e^{\left(-x^2-y^2+xy\right)}dxdy=\int\limits_{y=-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=\frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

Xem ví duï sau.

Ví duï 9 : Tính $I=\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}\int\limits_{y=-\infty}^{\infty}e^{\left(-x^2-y^2+xy\right)}dxdy=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{\sqrt{|A|}}$,

do ñoåi bieán moät tí veà daïng toaøn phöông

$$-x^2-y^2+xy=-\left(x^2+y^2-xy\right)=-\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-X^TAX$$

$-x^2-y^2+xy=-\left(x^2-xy\right)-y^2=-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}-y^2$, vaø det(A)=$|A|=\frac{3}{4}$

BAØI 3: ÖÙNG DUÏNG TÍCH PHAÂN KEÙP

Tính dieän tích vaø theå tích laø xuaát phaùt cuûa tích phaân keùp . ÔÛ ñaây ta xeùt caùc öùng duïng khaùc, tính caùc ñaëc tröng vaät lyù treân dieän tích vaø theå tích.

3.1 Momen quan tính cua tam phang :

Mat ño khoi löông tai ñiem (x,y) la ham δ(x,y) thì cac momen quan tính theo cac truc chính la: $J_{Ox} = \iint\limits_D \delta(x,y)y^2dxdy$, $J_{Oy} = \iint\limits_D \delta(x,y)x^2dxdy$

Vay momen quan tính cua vat the khong the triet tieu.

Ñoi vôi truc $Oz \perp (Oxy)$ thì: $J_{Oz} = \iint\limits_D \delta(x,y)(x^2+y^2)dxdy$

• Ñoi vôi vat the ña giac: Nhô: ñiem $M_{n+1} \equiv M_1, \quad M_i(x_i, y_i), \; i = \overline{1,n}$

$$J_{Ox} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\left[(y_i + y_{i+1})^2 - y_iy_{i+1}\right] = \iint\limits_D y^2dxdy$$

$$J_{Oy} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\left[(x_i + x_{i+1})^2 - x_ix_{i+1}\right] = \iint\limits_D x^2dxdy$$

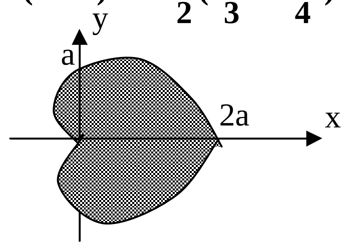
Ñoi vôi truc $Oz \perp (Oxy)$ thì: $J_{Oz} = \iint\limits_D \left[x^2 + y^2\right]dxdy$ =

$$= \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\left[(x_i + x_{i+1})^2 - x_ix_{i+1} + (y_i + y_{i+1})^2 - y_iy_{i+1}\right]$$

Ví du 1 : tìm J_y cua hình D giôi han bôi $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ vôi mat ño khoi löông la δ(x, y) = y

$$J_y = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x}} y.x^2dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

Ví du 2 : tính J_x cua cacñioit, co phöông trình la:
r = a(1 + cos φ), δ(x,y) = 1



ta co : $J_x = \iint\limits_D y^2dxdy$, ñoi sang toa ño cöc ta co $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$,

$$J_x = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=a(1+\cos\varphi)} r^2\sin^2\varphi\,.rdr = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi(1+\cos\varphi)^4.d\varphi = \frac{21}{32}\pi a^4$$

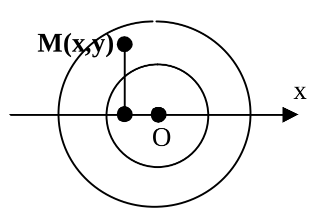
Ví du 4 : Tìm momen quan tính cua hình vanh khan co 2 ban kính $a < R$

a) Ñoi vôi truc ox trong mat phang (H3)

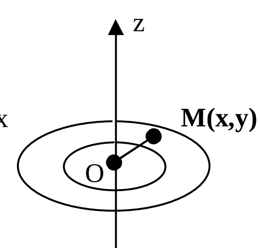
b) Ñoi vôi truc oz thang goc vôi mat phang (H4).

Giai:

a/ $J_{ox} = \iint\limits_{D_{xy}} y^2dxdy =$



H3



H4

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_{\rho=a}^{\rho=R} \rho^2(\rho d\rho) =$$

$$= 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{R^4-a^4}{4}\right) = \left(\frac{R^4-a^4}{4}\right)\pi =$$

$$= \boxed{\left(R^2+a^2\right)\frac{\mu}{4}}, \ \mu = \pi\left(R^2-a^2\right)$$

<u>b/</u> $J_{oz} = \iint_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\rho=a}^{\rho=R} \rho^2(\rho d\rho) = \pi\frac{R^4-a^4}{2} =$

$$= \boxed{\left(R^2+a^2\right)\frac{\mu}{2}}$$

Chuù yù: Khi a=0 thì ví duï 3 laø tröôøng hôïp rieâng cuûa ví duï 4.

<u>Ví duï 5 :</u> Tìm momen quaùn tính cuûa hình vuoâng coù caïnh $R\sqrt{2}$

a) Ñoái vôùi truïc oz thaúng goùc vôùi maët phaúng taïi ñieåm O. (H5)

b) Ñoái vôùi truïc ox naèm trong maët phaúng (H6), vaø truïc x/ //Ox qua A.

c) Ñoái vôùi truïc oz thaúng goùc vôùi maët phaúng (H7).

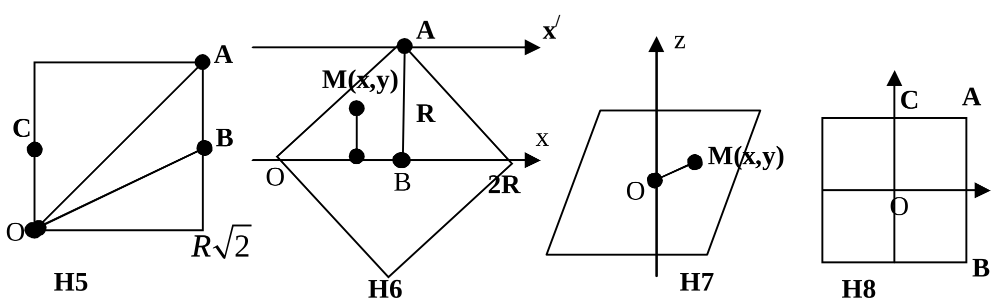
d) Ñoái vôùi truïc oz taïi ñieåm C (giöõa caïnh) thaúng goùc vôùi maët phaúng (H5).

Giaûi:

<u>a/</u> Hình (H5): ôû ñaây ta laáy maät ñoä khoái löôïng $\delta = 1$.

$$J_{oz} = \iint_{D_{xy}} \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_{x=0}^{x=R\sqrt{2}} \int_{y=0}^{y=R\sqrt{2}} \left(y^2+x^2\right)dxdy =$$

$= \frac{8R^4}{3} = \boxed{\frac{4\mu R^2}{3}}$, vôùi $\mu = \delta\left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$ laø troïng löôïng cuûa ñóa vuoâng.



Caùch khaùc: toïa ñoä cöïc: $x_B = R\sqrt{2} = \rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = \frac{R\sqrt{2}}{\cos\varphi}$

$$J_{oy} = \iint_{D_{xy}} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = 2\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho=\frac{R\sqrt{2}}{\cos\varphi}} \rho^3 d\rho\right) = 2\frac{4R^4}{3} = \frac{8R^4}{3} = \boxed{\frac{4\mu R^2}{3}},$$

<u>b/</u> Hình (H6): $OA = R\sqrt{2}$, $BA = R$, vì ñoái xöùng neân

$J_{ox} = 2\iint_{D_{xy}} y^2 dxdy = 2\int_{y=0}^{y=R} \int_{x=y}^{x=-y+2R} y^2 dxdy = \frac{R^4}{3} = \boxed{\frac{\mu R^2}{6}}$, vôùi $\mu = \delta\left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$ laø troïng löôïng cuûa ñóa vuoâng. Ñoái vôùi truïc x/ ta coù:

$$J_{Ox'} = J_{Ox} + a^2F = +R^2\left(R\sqrt{2}\right)^2 = \frac{R^4}{3} + 2R^4 = \frac{7R^4}{3}$$ (ñònh lyù Huygen)

<u>c/</u> Hình (H7, H8): $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow OC = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$$J_{oz} = \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2\right)dxdy = 4\int_{x=0}^{x=\frac{R}{\sqrt{2}}}\int_{y=0}^{y=\frac{R}{\sqrt{2}}} \left(y^2 + x^2\right)dxdy =$$

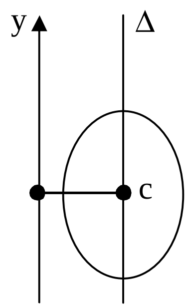
$= \dfrac{4R^4}{6} = \dfrac{2R^4}{3} = \boxed{\dfrac{mR^2}{3}}$, vôùi $m = \delta\left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$ laø troïng löôïng cuûa ñóa vuoâng.

<u>d/</u> Sinh vieân töï giaûi, hình H8.

==> H6 quay deã nhö hình H7 vaø hình H5 khoù quay nhaát. Vaø ta coù theå so saùnh söï quay cuûa hình vuoâng vaø hình troøn qua ví duï 3 vaø ví duï 5.

3.2 Momen tónh vaø troïng taâm :

Töø ñònh nghóa cuûa bieåu thöùc momen quaùn tính, ta nhaän ra raèng momen quaùn tính bieåu hieän tính yø noäi taïi cuûa chaát ñieåm coù khoái löôïng δ(x,y) > 0 khi chuyeån ñoäng quay quanh moät truïc naøo ñoù, nhöng baûn thaân noù chöùa bieåu dieãn ñöôïc söï caân baèng tónh hoïc ñoái vôùi truïc ñoù ra sao ? möùc ñoä khaùc thì khi quay quanh truïc ñoù ra sao? vaø vì vaäy moät khaùi nieäm veà noù laø momen tónh vaø toïa ñoä troïng taâm ñöôïc ñònh nghóa nhö sau :



H9

- Momen tónh ñoái vôùi truïc x laø $S_x = \iint_D y\delta(x,y)dxdy$
- Momen tónh ñoái vôùi truïc y laø $S_y = \iint_D x\delta(x,y)dxdy$
- Toïa ñoä troïng taâm C : $x_c = \dfrac{S_y}{S}$, $y_c = \dfrac{S_x}{S}$

Vôùi δ(x,y) maät ñoä khoái löôïng taïi ñieåm (x,y) vaø

S= $\iint_D \delta(x,y)dxdy$ laø dieän tích mieàn D.

- Ñoái vôùi vaät theå ña giaùc:

$$S_{Ox} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i\right)\left(y_i + y_{i+1}\right) = \iint_D ydxdy$$

$$S_{Oy} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i\right)\left(x_i + x_{i+1}\right) = \iint_D xdxdy$$

Nhôù: ñieåm $M_{n+1} \equiv M_1$, $M_i\left(x_i, y_i\right)$, $i = \overline{1,n}$

Thaät vaäy theo ñònh lyù trung bình ta coù:

$$S_y = \iint_D x\delta(x,y)dxdy = x_C\iint_D \delta(x,y)dxdy = x_C.S \Rightarrow x_C = \frac{S_y}{S}$$

$$S_x = \iint_D y\delta(x,y)dxdy = y_C\iint_D \delta(x,y)dxdy = y_C.S \Rightarrow y_C = \frac{S_x}{S}$$

<u>*Nhaän xeùt :*</u>

• Momen tónh co the am, döông, momen tónh ñoi vôi 1 truc nao ño ma triet tieu thì truc ño goi la truc trung hoa, giao cua 2 truc trung hoa bat ky höông nao, cung chính la toa ño trong tam.

That vay goi Δ (H9) la truc trung hoa thì

Cong thöc ñoi truc ta co: $x = x_C + x_\Delta$, $S_y = \iint\limits_D x dxdy = \iint\limits_D \left(x_C + x_\Delta\right) dxdy = x_C \iint\limits_D dxdy + \iint\limits_D x_\Delta dxdy =$

$$= x_C S + \iint\limits_D x_\Delta dxdy = S_y + \iint\limits_D x_\Delta dxdy \Rightarrow \iint\limits_D x_\Delta dxdy = S_\Delta = 0$$

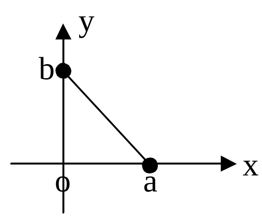
Va momen quan tính ñoi vôi truc Δ la nho nhat. That vay $x = x_C + x_\Delta$

$$J_{Oy} = \iint\limits_D \left(x_C + x_\Delta\right)^2 dxdy = x_C^2 \iint\limits_D dxdy + \iint\limits_D x_\Delta^2 dxdy + 2x_C \cancel{\iint\limits_D x_\Delta dxdy} =$$

$= x_C^2 \iint\limits_D dxdy + J_\Delta + 0 = x_C^2.S + J_\Delta \geq J_\Delta$. ñpcm. va co $J_{Oy} = x_C^2.S + J_\Delta$

Va ñay chính la ñònh ly Huyghen.

• Momen quan tính luon luon döông. Va momen quan tính ñoi vôi truc trung hoa Δ la nho nhat, so vôi cac truc // vôi truc trung hoa.



Ví du 1 : tìm trong tam cua 1 tam giac ñong chat nhö hình ve ben.

ta co phöông trình ñöông thang $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, dien tích S = $\frac{1}{2}$ab

$$S_y = \iint\limits_D x dxdy = \int_0^a x dx \int_0^{y=b(1-\frac{x}{a})} dy = \int_0^a xb(1 - \frac{x}{a})dx = \frac{bx^2}{2} - \frac{b}{a}\frac{x^3}{3} \Big|_0^a =$$

$= \frac{ba^2}{2} - \frac{ba^2}{3} = \frac{ba^2}{6}$. Vay $x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{ba^2}{6} \Big/ \frac{1}{2}ab = \frac{1}{3}a$,

töông tö ta co $y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{1}{3}b$.

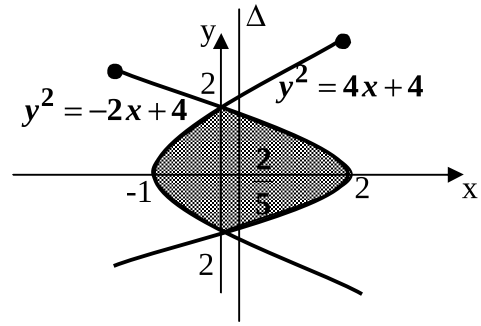
Mot lan nöa ta tìm lai ñöôc ket qua ma trong hình sô cap ña biet .

Ví du 2 : tìm toa ño trong tam cua hình phang ñong chat giôi han bôi 2 ñöông cong sau $y^2 = 4x + 4$ va $y^2 = -2x + 4$.

Dien tích $S = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{x=\frac{y^2}{4}-1}^{x=-\frac{y^2}{2}+2} dx =$

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right)dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{4}y^2\right)dy = 8$$



$$S_y = 2\int_{y=0}^{y=2} dy \int_{x=\frac{y^2-4}{4}}^{x=\frac{4-y^2}{2}} x\,dx = 2\int_{y=0}^{y=2}\left(\frac{3}{2} - \frac{3y^2}{4} + \frac{3}{32}y^4\right)dy$$

$$S_y = \int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{2} + \frac{3}{16}y^4\right)dy = 3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80}\Big|_0^2 = \frac{16}{5}$$

$x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{2}{5}$, $y_c = 0$ lai roi rang do tính chat ñoái xöùng ¢

Ví dui 3 : Tìm toia ñoi troing taim vai momen quain tính ñoái vôùi truic trung hoia cuia noi, cuia hình phaing ñoàng chat coi toia ñoi nhö hình vei. Coi 8 ñieim, ñieim thöù 9 truing vôùi ñieim thöù nhat. A1(1,0), A2(2,0), A3(2,3), A4(3,3), A5(3,4), A6(0,4), A7(0,3), A8(1,3), A9(1,0).

a) Ta aip coing thöùc vôùi 9 ñieim (tính baing Vinacal-570MS).

$$S_x = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=9}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i\right)\left(y_i + y_{i+1}\right) = \frac{90}{6} = 15,$$

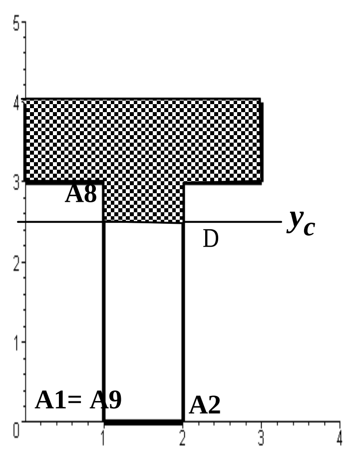
(Caich baim may chính xaic, xin xem saich Vinacal-570MS cuing taic gia)

Tính theo tích phain: $S_x = \iint_{D_1} ydxdy + \iint_{D_2} ydxdy = \frac{9}{2} + \frac{21}{2} = 15$, do taich:

Hình chöi nhat döôùi: $\iint_{D_1} ydxdy = \int_{x=1}^{x=2} dx \int_{y=0}^{y=3} ydy = \frac{9}{2}$

Hình chöi nhat trein: $\iint_{D_2} ydxdy = \int_{x=0}^{x=3} dx \int_{y=3}^{y=4} ydy = \frac{21}{2}$

Dieän tích hình S= $3 \times 1 + 3 \times 1 = 6$ hay ta coi thei duing coing thöùc:



tt	x	y	Momen tónh	Momen quain tính
A1	1	0		
A2	2	0	0	0
A3	2	3	18	54
A4	3	3	-18	-81
A5	3	4	21	111
A6	0	4	96	576
A7	0	3	0	0
A8	1	3	-18	-81
A9	1	0	-9	-27
		Σ	90	552
Bang A				46

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=8}\left(x_i y_{i+1}-x_{i+1}y_i\right)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&2&2&3&3&0&0&1&1\\0&0&3&3&4&4&3&3&0\end{vmatrix}=\frac{12}{2}=6.$$

Vaäy $y_c=\frac{S_x}{S}=\frac{15}{6}=2.5$ Ñaây tung ñoä cuûa truïc tung hoøa Δ nhö hình veõ.

Thöïc ra ta coù theå tìm troïng taâm cuûa hình baèng caùch laáy ñieåm giöõa ñoaïn noái hai troïng taâm hình chöõ nhaät treân vaø döôùi baèng nhau, ta cuõng thu ngay ñöôïc keát quaû treân $y_c=2.5$. Vôùi phöông phaùp naøy ta coù theå tìm troïng taâm baát kyø hình naøo, baèng caùch phaân hình ra nhieàu maûnh, maø moãi maûnh ta ñaõ bieát troïng taâm cuûa chuùng, laàn löôït tìm troïng taâm noái 2 maûnh moät, theo tæ troïng cuûa dieän tích 2 maûnh ñoù, vaø cöù theá ....

Ñaây laø daàm caàu ñuùc saün chöõ T, ñöôïc laép gheùp ñeå thaønh maët caàu trong caùc coâng trình caàu ñöôøng. Khi coù taûi troïng thì phaàn treân truïc trung hoøa cuûa daàm seõ bò neùn, ngöôïc laïi phaàn döôùi truïc trung hoøa cuûa daàm seõ bò keùo.

b) Ñoái vôùi momen quaùn tính ñ/v truïc Ox, ta aùp coâng thöùc vôùi 9 ñieåm nhö coät cuoái ô baûng treân, tính baèng excel, hay tính baèng Vinacal-570MS.

$$J_x=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=8}\left(x_i y_{i+1}-x_{i+1}y_i\right)\left[\left(y_i+y_{i+1}\right)^2-y_i y_{i+1}\right]=\frac{552}{12}=46,$$

Tính theo tích phaân: $J_x=\iint_{D_1}y^2dxdy+\iint_{D_2}y^2dxdy=9+37=46$, do

Hình chöõ nhaät döôùi: $\iint_{D_1}y^2dxdy=\int_{x=1}^{x=2}dx\int_{y=0}^{y=3}y^2dy=9$

Hình chöõ nhaät treân: $\iint_{D_2}y^2dxdy=\int_{x=0}^{x=3}dx\int_{y=3}^{y=4}y^2dy=37$

c) Ñeå tính momen quaùn tính ñoái vôùi truïc trung hoøa Δ, ta coù theå duøng ñònh lyù Huygen trong vaät lyù veà ñoåi truïc trong coâng thöùc tính momen quaùn tính:

$$46=J_x=J_D+a^2F=J_D+\left(\frac{5}{2}\right)^2 6\Rightarrow J_D=46-\frac{150}{4}=8.5$$

Ñeå tính tröïc tieáp ta duøng coâng thöùc ñoåi truïc: $y=Y_D+a\Rightarrow Y_D=y-2.5$, vaø sau ñoù ta tính töông töï nhö baûng A treân moät laàn nöõa, ta coù:

	y	x	$Y_D=y-2.5$	Momen tónh	Momen quaùn tính
A1	0	1	-2.5		
A2	0	2	-2.5	-12.5	46.875
A3	3	2	0.5	-12	31.5
A4	3	3	0.5	-0.5	-0.375
A5	4	3	1.5	6	9.75
A6	4	0	1.5	13.5	30.375
A7	3	0	0.5	0	0
A8	3	1	0.5	-0.5	-0.375
A9	0	1	-2.5	6	-15.75
			Σ	0	102
Baûng B					8.5

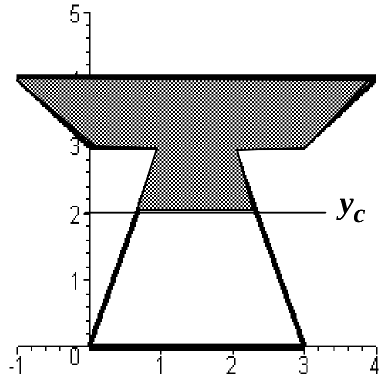
Xem baûng ta thaáy laïi keát quaû: Momen tónh ñoái vôùi D thì trieät tieâu, vaø

$$J_{D} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=8}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\left[\left(y_i + y_{i+1}\right)^2 - y_i y_{i+1}\right] = \frac{102}{12} = 8.5 \quad ¢$$

Ví du 4 : Tìm toa ño trong tam va momen quan tính ño vôi truc trung hoa cua no theo hình ve co toa ño nhö hình sau: A1(0,0), A2(3,0), A3(2,3), A4(3,3), A5(4,4), A6(-1,4), A7(0,3), A8(1,3).

Sinh vien tö giai. $J_x = \iint_D y^2 dxdy = \frac{768}{12} = 64$, S=10

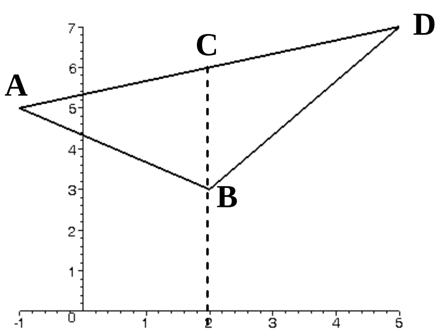
$S_x = \frac{130}{6} \Rightarrow y_c = \frac{130}{6 \times 10} = \frac{13}{6}$=2.1666



(Cach bam may phan nay, xin xem sach Vinacal-570MS cung tac gia)

Ví du 5 : Tìm toa ño trong tam va momen quan tính ño vôi truc Oy theo hình ve co toa ño nhö hình sau: B(2,3), D(5,7), A(-1,5), B(2,3). Nghiem lai bang cong thöc giai tích.

Dien tích S:



$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right) = \frac{18}{2} = 9$$

Momen tónh:

$$S_x = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\left(y_i + y_{i+1}\right) =$$

$$= \frac{270}{6} = 45$$

$$S_y = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\left(x_i + x_{i+1}\right) = \frac{108}{6} = 18$$

Vay $y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{45}{9} = 5$, $\quad x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{18}{9} = 2$

$$J_{Oy} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\left[\left(x_i + x_{i+1}\right)^2 - x_i x_{i+1}\right] = \frac{594}{12} = 49.5$$

Ta chæ nghiem lai momen quan tính /Oy: ta chia thanh 2 vung

- $\iint_{ABC} x^2 dxdy = \int_{x=-1}^{x=2} dx \int_{y=\frac{-2x+13}{3}}^{y=\frac{x+16}{3}} x^2 dy = \int_{x=-1}^{x=2} x^2\left(x+1\right)dx = \frac{27}{4}$
- $\iint_{BDC} x^2 dxdy = \int_{x=2}^{x=5} dx \int_{y=\frac{4x+1}{3}}^{y=\frac{x+16}{3}} x^2 dy = \int_{x=2}^{x=5} x^2\left(-x+5\right)dx = \frac{171}{4}$

Vay $J_{Oy} = \dfrac{27+171}{4} = 49.5$. Ta co truc BC=Δ qua trong tam nen ta tìm momen quan tính J_{Δ} (ñoi truc vôi x=2): ta van chia thanh 2 vung

- $\displaystyle\iint_{ABC} [x-2]^2\,dxdy = \int_{x=-1}^{x=2} dx \int_{y=\frac{-2x+13}{3}}^{y=\frac{x+16}{3}} [x-2]^2\,dy = \int_{x=-1}^{x=2} [x-2]^2 (x+1)\,dx = \frac{27}{4}$
- $\displaystyle\iint_{BDC} [x-2]^2\,dxdy = \int_{x=2}^{x=5} dx \int_{y=\frac{4x+1}{3}}^{y=\frac{x+16}{3}} [x-2]^2\,dy =$

$\displaystyle = \int_{x=2}^{x=5} [x-2]^2(-x+5)\,dx = \frac{27}{4}$. Vay $J_{\Delta} = \dfrac{27}{4} + \dfrac{27}{4} = 13.5$. Co the tìm:

$49.5 = J_{Oy} = J_{\Delta} + a^2F = J_{\Delta} + 2^2.9 \Rightarrow J_{\Delta} = 49.5 - 36 = 13.5$

Vay momen quan tính ñoi vôi truc trung hoa la be nhat. ¢

Ví du 6 : Tìm toa ño trong tam cua hai hình: hình goc va hình bien hình, ma ta ña xet ô ví du 2, muc 2.2, co cac toa ño theo bang:

TT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	4	3	4	2	0	2	2	1
y	0	-2	2	2	3	4	3	2	1	0

ñöôc bien hình qua phep bien ñoi tuyen tính co ma tran töông öng la:

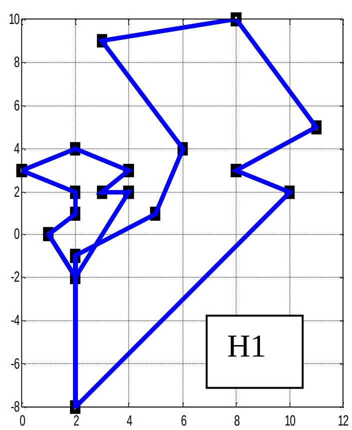
$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

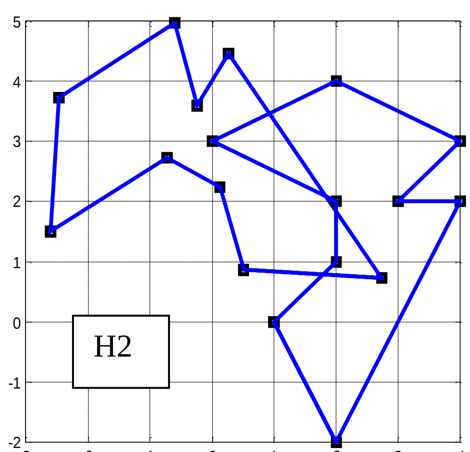
Nhan ma tran G vôi ma tran $M_{2,10}$ ô tren ta ñöôc ma tran toa ño bien hình nhö sau (H1):

x	2	2	10	8	11	8	3	6	5	2
y	-1	-8	2	3	5	10	9	4	1	-1

Dung cac cong thöc tren ñe tìm toa ño trong tam 2 hình ô H1:

trong tam hình goc: $\begin{bmatrix} \frac{34}{15} \\ \frac{23}{15} \end{bmatrix}$, trong tam cua hình bien: $\begin{bmatrix} \frac{91}{15} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ --> H1





Chu y ta co: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{34}{15} \\ \frac{23}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{91}{15} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$? Va neu lay: $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ lam phep bien hình: nghóa la nhan ma tran G vôi ma tran $M_{2,10}$ ô tren ta ñöôc ma tran toa ño bien hình nhö sau (H2):

x	0.5	2.732	0.267949	-0.232	-0.598	-2.4641	-2.598	-0.732	0.13397	0.5
y	0.866	0.732	4.464102	3.5980	4.9641	3.7320	1.5	2.7320	2.23205	0.8660

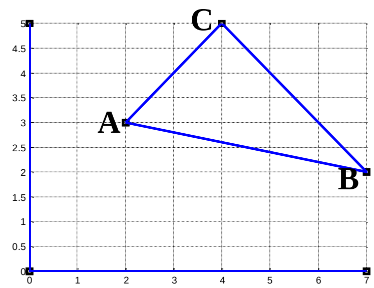
Dung cac cong thöc tren ñe tìm toa ño trong tam 2 hình ô H2:

Trong tam hình goc van la: $\begin{bmatrix} \frac{34}{15} \\ \frac{23}{15} \end{bmatrix}$, trong tam cua hình bien: $\begin{bmatrix} -0.194572 \\ 2.729657 \end{bmatrix}$ --> H2, ta van co

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{34}{15} \\ \frac{23}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.194572 \\ 2.729657 \end{bmatrix}$$

<u>Nhan xet</u>: Ma tran $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ban ñau la ma tran cua phep bien ñoi affin nen hình bien se bò meo mo, con ma tran $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ sau la cua phep quay (hình bien khong meo mo) cua co the, nen toa ño trong tam ñöôc giö nguyen qua phep quay, cac thao tac tính toan tren, co the cai ñat thuat toan bang excel.

<u>Ví du 7 :</u> Tính hai tích phan: I= $\iint_D xdxdy$, $J = \iint_D x^2 dxdy$ D la tam giac co cac ñænh la A(2;3), B(7;2), C(4;5).



Giai: Xem hình

$$I_1 = \int_{x=2}^{x=4} xdx \int_{y=\frac{-x}{5}+\frac{17}{5}}^{y=x+1} dy = \left(\frac{2}{5}x^3 - \frac{6}{5}x^2\right)_{x=2}^{x=4} = 8$$

$$I_2 = \int_{x=4}^{x=7} xdx \int_{y=\frac{-x}{5}+\frac{17}{5}}^{y=-x+9} dy = \left(-\frac{4}{5}x^3 + \frac{14}{5}x^2\right)_{x=4}^{x=7} = 18$$

Vay I=8+18=26

Cach 2: Tö 2 bieu thöc I, J muon tính, ño chính la momen tónh, momen quan tính cua tam giac ñ/v truc Oy. Nen ô ñay ta co the ap dung cong thöc: $\iint_D xdxdy = S_{Oy} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i\right)\left(x_i + x_{i+1}\right)$

TT	1	2	3	4
x	2	7	4	2
y	3	2	5	3

Xem cach bam may nhanh Vinacal-570MS (cung tac gia) cho cong thöc tren, ta co

I= $\iint_D xdxdy = \frac{1}{6}156 = 26$, töông tö: $\iint_D ydxdy = \frac{1}{6}120 = 20$.

Tính $J = \iint_D x^2dxdy$. bang cach tach 2 tích phan:

$$J_1 = \int_{x=2}^{x=4} x^2dx \int_{y=\frac{-x}{5}+\frac{17}{5}}^{y=x+1} dy = \int_{x=2}^{x=4} x^2\left(\frac{6x-12}{5}\right)dx = \frac{136}{5}$$

$$J_2 = \int_{x=4}^{x=7} x^2dx \int_{y=\frac{-x}{5}+\frac{17}{5}}^{y=-x+9} dy = \int_{x=4}^{x=7} x^2\left(\frac{-4x+28}{5}\right)dx = \frac{459}{5} \Rightarrow J = \frac{136}{5} + \frac{459}{5} =$$

=119

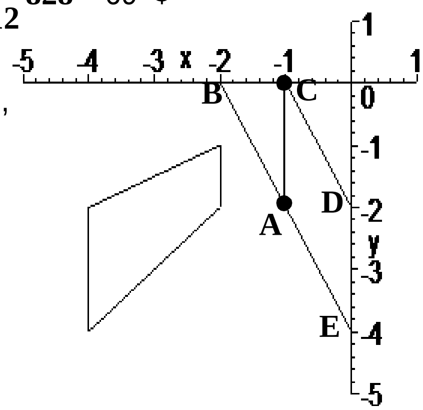
Cach 2: Nhô cong thöc momen quan tính:

$$J = \iint_D x^2dxdy = J_{Oy} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i\right)\left[\left(x_i + x_{i+1}\right)^2 - x_i x_{i+1}\right]$$

Bam may tong tren: $J_{Oy} = \frac{1}{12}1428 = 119$, töông tö: $J_{Ox} = \frac{1}{12}828 = 69$ ¢

Ví du 8 :

Mien Q giôi han bôi 4 ñiem (0, -2), (0, -4), (-2,0) va (-1,0), hay tính I= $\iint_Q \left[(y+2x)^2(x+y)\right]dxdy$



Giai:

Ñat $u = (y+2x)$, $v = (x+y)$,

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

Mien bien hình la mien hình thang nho:

$$I = \iint_Q (y+2x)^2(x+y)dxdy = \int_{-4}^{-2} u^2 \int_{v=u}^{v=u/2} vdudv = \int_{-4}^{-2} \frac{-3u^4}{8}du = \frac{-372}{5}$$

Cach 2: Tính tröc tiep, ta phan ra hai mien D_1 = ABC, D_2 =ACDE

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} dxdy = \int\limits_{x=-2}^{x=-1} \int\limits_{y=-2x-4}^{y=0} (y+2x)^2 (x+y)\, dxdy = \frac{-356}{15}$$

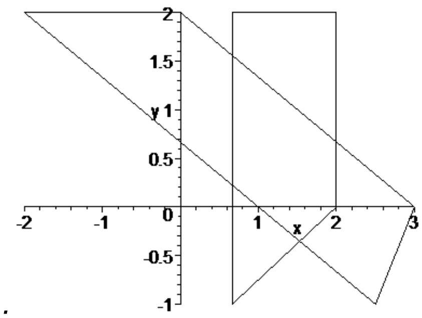
$$I_2 = \iint\limits_{D_2} dxdy = \int\limits_{x=-1}^{x=0} \int\limits_{y=-2x-4}^{y=-2x-2} (y+2x)^2 (x+y)\, dxdy = \frac{-152}{3}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{-356}{15} - \frac{152}{3} = \frac{-372}{5},$$

tính chi tieát daønh cho sinh vieân.

Ví duï 8 : Mieàn Q giôùi haïn bôûi 4 ñieåm (-2, 2), (0, 2), (3, 0) vaø (5/2, -1),

haõy tính I= $\iint\limits_{Q} \left(y + \frac{2x}{3} \right)^3 dxdy$



Giaûi:

Ñaët $u = y + \frac{2x}{3}$, $v = y$ (coù theå ñaët tuøy yù)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}$$. Mieàn bieán hình laø mieàn hình thang nhoû coù toïa ñoä theo sô ñoà nhaân

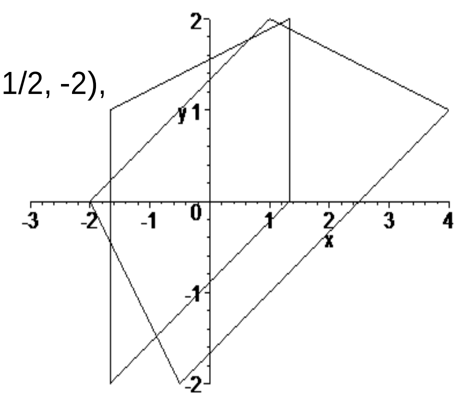
ma trận (baûng nhaân):

		-2	0	3	$\frac{5}{2}$
		2	2	0	-1
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	2	2	$\frac{2}{3}$
0	1	2	2	0	-1

$$I = \frac{3}{2} \iint\limits_{Q} \left(y + \frac{2x}{3} \right)^3 dxdy = \frac{3}{2} \int\limits_{\frac{2}{3}}^{2} u^3 \int\limits_{-2+u-\frac{4v}{3}=0}^{v=2} dudv = \frac{1832}{135}$$

Ví duï 9: Mieàn Q giôùi haïn bôûi 4 ñieåm (-2, 0), (1, 2), (4, 1) vaø (-1/2, -2),

haõy tính I= $\iint\limits_{Q} (3y - 2x)^3 dxdy$



Giaûi:

$$I = \iint\limits_{Q} (3y - 2x)^3 dxdy = \iint\limits_{Q} 27 \left(y - \frac{2x}{3} \right)^3 dxdy$$

Ñaët $u = y - \frac{2x}{3}$, $v = y$ (coù theå ñaët tuøy yù)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{2}$$

Mien bien hình la hình thang nho (bang nhan):

		-2	1	4	$\frac{-1}{2}$
		0	2	1	-2
$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-5}{3}$
0	1	0	2	1	-2

$$I = 27\iint_Q \left(y - \frac{2x}{3}\right)^3 dxdy = 27.\frac{3}{2}\int_{\frac{-5}{3}}^{\frac{4}{3}} u^3 \int_{\frac{8}{3}-2u+3v=0}^{\frac{-14}{3}-u+3v=0} dudv = \frac{3177}{20}$$

BAI TAP

1/ Tính cac tích phan sau:

a/ $I = \int_0^1\left(\int_2^3 (x-y)y\,dy\right)dx$ va $J = \int_2^3\left(\int_0^1 (x-y)y\,dx\right)dy$.

so sanh I va J

b/ Cho $K = \int_0^1\left(\int_0^x (x-y)y\,dy\right)dx$ va $L = \int_0^x\left(\int_0^1 (x-y)y\,dx\right)dy$.

So sanh K va L, tö ño cho ket luan.

c/ Chöng minh : $\int_0^1\int_0^x (x-y)y\,dydx = \int_0^1\int_y^1 (x-y)y\,dxdy$

2/ Hoan vò can tích phan sau:

a/ $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$ b/ $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx$ c/ $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$

3/ Tính cac tích phan sau:

a) $\iint_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy$, D la hình vuong: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}$

b) $\iint_D x\ln y\,dxdy.$ D la hình chö nhat $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le e$

c) $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}.$ D xac ñònh bôi $x \ge 1$, $y \ge 1$, $x + y \le 3$

d) $\iint_D x^2(y-x)dxdy.$ D giôi han bôi cac ñöông y = x^2, x = y^2

4/ Tính cac tích phan sau:

a) $\iint_D (x+y)^3(x-y)dxdy.$ D giôi han bôi:

x + y = 1, x – y = 1, x + y = 3, x – y = -1

b) $\iint_D (2x-y)dxdy.$ D giôi han bôi :

x + y = 1, x + y = 2, 2x – y = 1, 2x – y = 3

c) $\iint_D xy\,dxdy.$ D giôi han bôi :

$xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 3x\ (x > 0,\ y > 0)$

d) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy.$ D giôi han bôi :

$x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = 4a^2\ (a > 0)$

e) $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}.$ D giôi han bôi $y = \sqrt{1 - x^2}$ va ox

f) $\iint_D xy^2\,dxdy.$ D giôi han bôi cac ñöông tron:

$x^2 + (y - 1)^2 = 1$, va $x^2 + y^2 - 4y = 0$

g) $\iint_D e^{x^2 + y^2}\,dxdy.$ D la mien $x^2 + y^2 \le a^2$

h) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$ D la Ellip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5/ Tính dien tích phang giôi han bôi cac ñöông :

a) $x^2 + y^2 = 2x,\quad x^2 + y^2 = 4x,\ y = x,\ y = 0$

b) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

c) $x^2 = ay,\ x^2 = by,\ y^2 = \alpha x,\ y^2 = \beta x\ (0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$

d) $x = 4y - y^2,\quad x + y = 6$

e) $x^2 + y^2 = 1$ va $x^2 + y^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

6/ Tính the tích giôi han bôi cac mat :

a) $y = 1 + x^2,\ z = 3x,\ y = 5,\ z = 0$ nam trong phan tam thö nhat.

b) $x^2 + y^2 = 2,\ z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0$

c) $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + z^2 = a^2$

d) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$

e) $z = x^2 + y^2,\quad z = x + y.$

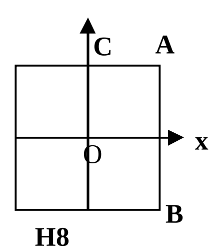
7/ Tính momen quan tính cua :

a/ Hình vanh khan co cac ban kính d, D, d < D, $\delta = 1$ (tæ khoi) .

- Ñoi vôi tam cua no
- Ñoi vôi ñöông kính cua no

b/ Tìm momen quan tính cua hình vuong canh a ñoi vôi truc ñi qua ñænh cua no, tröôc giao ñoi vôi mat phang cua hình vuong , $\delta = 1$

c/ Tìm momen quan tính cua mien giôi han $xy = 4,\ x + y = 5$, $\delta = 1$, ñoi vôi ñöông thang $y = x$.



H8

8/ Xac ñònh trong tam cac ban phang ñong chat giôi han bôi cac ñöông :

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,\quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

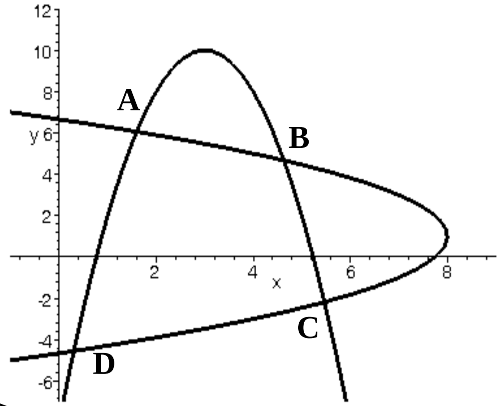
b) $y^2 = x,\quad x^2 = y$

c) $y = \sqrt{2x - x^2},\quad y = 0$

9/ Tìm momen quan tính cua hình vuong ben vôi truc Ox :

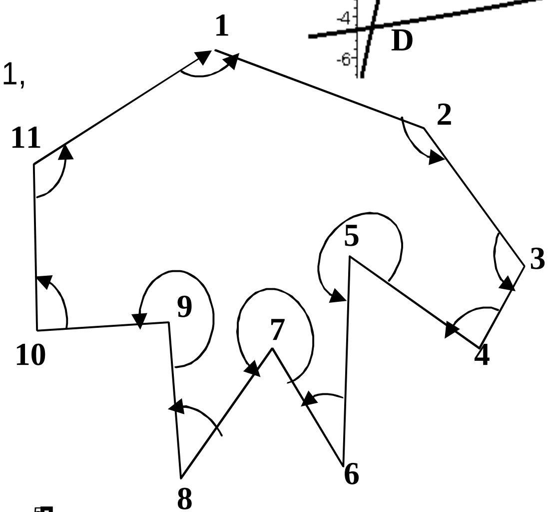
10/ Tìm dien tích giao bôi 2 ñöông:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 12x - 8 \\ x = -\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{31}{4} \end{cases}$$ (laøm tieåu luaän)



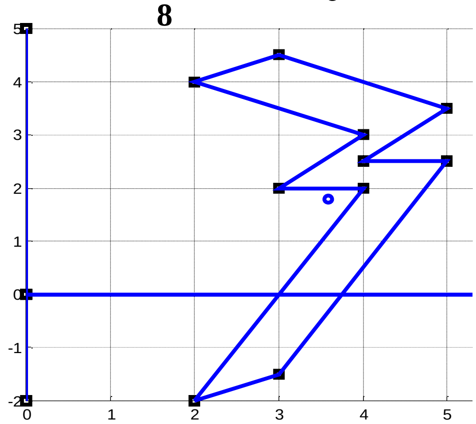
11/ Tính $I = \int\limits_{y=-\infty}^{y=\infty}\int\limits_{x=-\infty}^{x=\infty} e^{\left(-2x^2-3y^2+2xy\right)}dxdy$

12/ Trong xaây döïng, Ngöôøi ta duøng maùy kính vó ñeå ño khoaûng caùch vaø goùc xoay (ví duï ñaàu tieân ñöùng taïi ñieåm 1, ta seõ xaùc ñònh ñöôïc khoaûng caùch $\overline{12}$, ñöùng ô û 2 ta coù theâm $\overline{23}$ vaø goùc ñònh höôùng döông$\left(\overrightarrow{21},\overrightarrow{23}\right)$) .. cuoái cuøng ñöùng laïi ôû 1 ta coù theâm goùc ñònh höôùng döông$\left(\overrightarrow{1,11},\overrightarrow{12}\right)$ nhö hình veõ. Haõy moâ hình coâng thöùc tính dieän tích hình naøy vôùi caùc khoaûng caùch vaø goùc nhö hình veõ vaø cho ví duï roài duøng maùy tính Vinacal ñeå tính. (Baøi naøy daønh cho Sv laøm tieåu luaän).



13/ Cho 5 ñieåm $A_1(2,-2)$, $A_2(4,2)$, $A_3(3, 2)$, $A_4(4,3)$, $A_5(2,4)$. Baây giôø tònh tieán 5 ñieåm naøy thaønh B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vôùi vecto $\vec{a} = (1, 0.5)$. Tìm toïa ñoä troïng taâm cuûa ña giaùc kín 10 ñieåm treân nhö hình veõ.

ÑS=(43/12, 43/24)



14/ Cho hình phaúng baát kyø, laáy moät ñieåm M trong hình phaúng ñoù. Haõy tìm moät truïc qua ñi qua ñieåm M, sao cho momen quaùn tính cuûa vaät (hình phaúng) ñoái vôùi truïc ñoù laø nhoû nhaát.

(Coù theå laø truïc qua M vaø ñi qua troïng taâm cuûa hình phaúng ?)

Phan 2:

Ñai so: Ma tran, Ñònh thöc, He phöông trình, KGVT, Anh xa tuyen tính

CHÖÔNG 1
MA TRAN-HE PHÖÔNG TRÌNH TUYEN TÍNH
BAI 1: MA TRAN

1.1 Ñònh nghóa:

Mot ma tran m×n la mot bang chöõ nhat gom m×n phan töû nhö sau:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathrm{R})$$

Ta co cac ky hieu: $A=[a_{ij}]$ $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$

- Hai ma tran A va B bang nhau, ghi la A = B, neu chung co cung dang kích thöôc va cac phan töû töông öng bang nhau.
- Trong tröôøng hôïp m=n goi la ma tran vuong, va neu trong ma tran vuong ma co tat ca phan töû ñeu bang 0, ngoai tröø cac phan töû tren ñöôøng cheo chính bang 1, thì ta goi ño la ma tran ñôn vò.
- Ma tran chuyen vò A^T ñöôïc xay döïng töø ma tran A, bang cach ñoi hang thanh cot cua A.

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots & a_{m2} \\ \cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in M_{n,m}(\mathrm{R})$$

- Ma tran tam giac tren, döôùi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{21} & \vdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \vdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Ví du 1</u>: Tìm x,y,z,w sao cho: $\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ta ñöôïc he phöông trình:

$x + y = 3$; $x - y = 1$; $2z + w = 5$; $z - w = 4$

Nghiem cua he la x = 2, y = 1, z = 3, w = -1.

<u>Ví du 2</u>: hien nhien ta co $\left(A^T\right)^T = A$

1.2 Cac phep toan tren ñai so ma tran:

Cho A, B,C, 0 $\in M_{m,n}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$

- Cong: $C=A+B \Leftrightarrow [c_{ij}]=[a_{ij}]+[b_{ij}]$
- Nhan voi höôùng: $\alpha A = [\alpha a_{ij}] \in M_{m,n}$, $\alpha \in \mathrm{R}$.
- Vet cua ma tran vuong $A \in M_n$, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Ta co cac tính chat sau:

(I) (A + B) + C =A + (B + C)
(II) A + 0 = A
(III) A + (-A) = 0
(IV) A + B = B + A
(V) α (A + B) = α A + α B
(VI) (α + β) A = αA + βA
(VII) (α. β) A = α (β A)
(VIII) 1. A = A

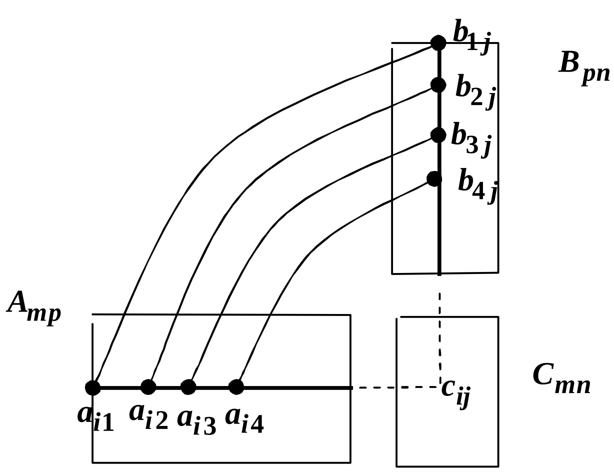
Vay tap cac ma tran $\in$ $M_{m,n}$(R) co he so thöc, la mot KGVT tren R.

- Nhan ma tran vôi ma tran:

Gia sö $[a_{ij}]$ va $[b_{ij}]$ la cac ma tran sao cho so cot cua A thì bang so dong cua B nghóa la $A_{m,p}$ va $B_{p,n}$. Khi ño tích cua ma tran A va B, ghi la AB la ma tran m x n ma so hang c_{ij} thu ñöôc bang cach nhan vo höông vetô dong thö i cua A vôi vetô cot thö j cua B, cu the:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Sô ño nhan ma tran:



Ví du1: Sô ño nhan ba ma tran:

[A(2,2)* B(2,3)]*C(3,2)= D(2,2) nhö hình ben döôi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

					0	2
		1	1	–1	1	1
		2	–1	1	–1	–1
1	–1	–1	2	–2	4	2
2	1	4	1	–1	2	10

ma tran cuoi D(2,2)= $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$.

Ta co the viet ñoan ma Pascal tích 3 ma tran

[A(m,n)* B(n,p)]*C(p,q)= D(m,q) nhö sau:

Khai bao dimension A(m,n), B(n,p), C(p,q), D(m,q)

for i=$\overline{1,m}$ do begin

for j=$\overline{1,q}$ do begin

D(i,j)=0;

for k=$\overline{1,p}$ do begin

for kk=$\overline{1,n}$ do begin

D(i,j)= D(i,j)+ A(i,kk) * B(kk,k) * C(k,j);

end

end

end

end

Ví du 2: $C=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 0, D=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq 0\Rightarrow CD=0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, DC=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

Tö ñay ta thay rang, trong ma tran neu co CD=0 $\not\Rightarrow$ (C=0 hay D=0).

Ví du khac $C=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\neq 0, D=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq 0\Rightarrow CD=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Ví du3: Ñac biet nhan 2 ma tran hang va cot, ket qua la so thöc:

$$\begin{bmatrix}h_1&h_2&\cdots&h_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\ \\c_n\end{bmatrix}=h_1c_1+h_2c_2+h_3c_3+\cdots+h_nc_n\in R$$

gioáng nhö tích vo höông chính tac ña biet ô lôp 12 pho thong.

Tính chat tích ma tran:

1/ $AI_n = I_n A$ vôi $A\in M_{n,n}$, $I_n\in M_{n,n}$ (ma tran ñôn vò cap n)

2/ A(BC)=(AB)C

3/ A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA

4/ Tong quat ta khong co AB=BA.

Ví du 4: Lay lai ví du tren ñe kiem tra sô ño nhan A(BC)

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix},$$

			0	2
			1	1
			–1	–1
1	1	–1	2	4
2	–1	1	–2	2
	1	–1	4	2
	2	1	2	10

ma tran cuoi A(BC)= D(2,2) = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ so sainh vôi ví dui 1.

- Luiy thöia ma train: A $\in$ M_n(R), ta kyi hieiu nhö sau:

$A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^m = A^{m-1}A$.

Ví dui5: $A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Ví dui6: Cho ma trận A vuoing cấp 2007 mai phan tử ở doing thứ i lai $(-1)^i i$, thì phần tử ở ôi doing 2 coit 3 cuia A^2 lai:

$$2\sum_{1}^{2007}(-1)^i i = 2\left[(-1+2)+(-3+4)-........(-2005+2006)-2007\right] =$$

$$= 2\left[\frac{2006}{2}\times(1)-2007\right] = -2008$$

Ñònh lyi: Giai söi A, B $\in$ M_n(R), vai giao hoan ñöôic, nghiai lai AB=BA. Khi ñoi:

1/ $(AB)^m = A^m B^m$.

2/ $A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + A^{m-3}B^2 + \ldots + B^{m-1}\right)$.

3/ $(A+B)^m = \sum_{i=0}^{i=m} C_m^i A^{m-i} B^i$. $C_m^i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$

Ñònh lyi: A^T lai ma tran ñöôic thiet laip töi A baing caich ñoii doing thanh coit vaiy: A $\in$ $M_{m,n}$(R), vai A^T $\in$ $M_{n,m}$(R)). Ta coi caic tính chat sau:

i/ $\left(A^T\right)^T = A$.

ii/ $(A+B)^T = A^T + B^T$.

iii/ $(AB)^T = B^T A^T$.

BAII 2: HEI PHÖÔNG TRÌNH TUYEIN TÍNH

2.1 Ñònh nghóa:

Hei phöông trình tuyein tính lai hei phöông trình coi daing toing quat (m $\neq$ n):

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow A_{m\times n}.x = b$$

Trong ñoi:

$$(2)\quad A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{L} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{L} & a_{2n}\\ \mathrm{L} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{L}\\ \mathrm{L} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{L}\\ a_{m1} & a_{m2} & \mathrm{L} & a_{mn}\end{bmatrix}$$ laø ma traän heä soá cuûa (1),

$$x_{n\times 1}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \mathrm{L}\\ x_n\end{bmatrix};\quad b_{m\times 1}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \mathrm{L}\\ b_m\end{bmatrix}$$

$$(3)\quad A_{m\times(n+1)}=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \mathrm{L} & a_{a1} & b_1\\ \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L}\\ a_{m1} & \mathrm{L} & a_{mn} & b_m\end{array}\right]=\left[A\,|\,b\right]=\left[A'\right],$$

laø ma traän môû roäng cuûa heä (1).

Heä naøy coù m phöông trình tuyeán tính, n aån soá x_1, ..., x_n.

Heä ñöôïc goïi laø <u>thuaàn nhaát</u> neáu caùc haèng soá b_1, ..., b_m taát caû baèng 0.

2.2 Nghieäm cuûa heä phöông trình tuyeán tính:

- Boä (x_1, x_2, x_3,.....x_n) goïi laø nghieäm neáu chuùng thoûa maõn heä (1). Giaûi heä (1) laø tìm taát caû boä nghieäm treân.
- Hai heä phöông trình tuyeán tính goïi laø töông ñöông neáu chuùng cuøng chung moät taäp nghieäm.
- Chuù yù heä thuaàn nhaát luoân coù ít nhaát moät nghieäm taàm thöôøng laø (0,0,...,0).

2.3 Caùc pheùp bieán ñoåi sô caáp (PBÑSC) *treân doøng cuûa ma traän:*

Pheùp bieán ñoåi sô caáp treân doøng (PBÑSC) cuûa ma traän goàm:

1/ Ñoåi choã 2 doøng cho nhau.

2/ Nhaân moät doøng vôùi moät heä soá khaùc khoâng.

3/ Coäng vaøo moät doøng vôùi moät doøng khaùc sau khi ñaõ nhaân vôùi moät haèng soá.

A ∈ $M_{m,n}$(R). Moät PBÑSC e treân ma traän A ñeå ñöôïc ma traän $A^/$, ta kyù hieäu $A\xrightarrow{e}A^/$.

Nhaän xeùt: Neáu e laø PBÑSC bieán A thaønh $A^/$, thì cuõng coù PBÑSC $e^/$ ñeå sao cho $A^/\xrightarrow{e^/}A$.

- <u>*Ñònh nghóa:*</u> A, B ∈ $M_{m,n}$(R) ñöôïc goïi laø töông ñöông doøng, khi A coù ñöôïc töø B qua höõu haïn moät soá PBÑSC. Luùc ñoù ta kí hieäu A ~ B.
- <u>*Ñònh nghóa:*</u> Moät ma traän vuoâng S ñöôïc goïi laø ma traän sô caáp khi coù moät PBÑSC sao cho $I\xrightarrow{e}S$. Khi ñoù ta vieát S = e(I).

<u>*Ví duï1:*</u> S= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ laø ma traän sô caáp vì $I\xrightarrow{d_1+2d_3}S$

- <u>*Meänh ñeà:*</u> A ∈ $M_{m,n}$(R) (<u>khoâng caàn vuoâng</u>). e laø Moät PBÑSC. Khi ñoù:

$A\xrightarrow{e}A^/\in$ $M_{m,n}$ vaø $I_m\xrightarrow{e}S\in M_{m\times m}$ thì: $A^/$ =SA.

<u>*Ví duï2:*</u> A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $A\xrightarrow{d_1+2d_3}A^/=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$S_1=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ laø ma traän sô caáp vì $I\xrightarrow{d_1+2d_3}S_1$

$A^/=\begin{bmatrix}3&5&8\\4&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}=S_1A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\4&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}$. Tieáp tuïc, hoaùn vò doøng 2, 3:

$$A^/=\begin{bmatrix}3&5&8\\4&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}A^{//}=\begin{bmatrix}3&5&8\\1&2&3\\4&3&2\end{bmatrix},\ I\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}S_2$$

$S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. Vaäy $A^{//}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\4&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}=S_2S_1A$

Ví duï3: $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$, $A\xrightarrow{d_1+2d_3}A^/=\begin{bmatrix}3&5&8\\1&2&3\end{bmatrix}$

$S_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ laø ma traän sô caáp vì $I\xrightarrow{d_1+2d_3}S_1$. Haõy thöû laïi:

$A^/=\begin{bmatrix}3&5&8\\1&2&3\end{bmatrix}=S_1A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$

• *Heä quaû:* A, B $\in$ $M_{m,n}(R)$. A ~ B khi vaø chæ khi toàn taïi caùc ma traän sô caáp $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ caáp m sao cho: $B= S_k S_{k-1}\ldots S_2. S_1. A$

Do $A\xrightarrow{e_1}A_1\xrightarrow{e_2}A_2\xrightarrow{e_3}A_3\ldots\xrightarrow{e_k}A_k=B$

ta coù $A_1 = S_1A$, $A_2 = S_2A_1$, $A_3 = S_3A_2, \ldots$, $B=A_k = S_kA_{k-1}$,

suy ra ñpcm.

• *Chuù yù:* Neáu e laø PBÑSC treân coät

A $\in$ $M_{m,n}(R)$ (khoâng caàn vuoâng). e laø Moät PBÑSC treân coät. Khi ñoù:

$A\xrightarrow{e}A^/\in M_{m,n}$ vaø $I_m\xrightarrow{e}S\in M_{m\times m}$ thì: $A^/=AS$.

Ví duï: $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-1c2+c1}A^/=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&4\end{bmatrix}$

$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-1c2+c1}S=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$.

Haõy thöû laïi: $A^/=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&4\end{bmatrix}=A.S=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$

2.4 Ñònh lyù veà caùc pheùp bieán ñoåi sô caáp:

Ñònh lyù: Sau höõu haïn caùc pheùp bieán ñoåi sô caáp treân heä (1) ta thu ñöôïc heä töông ñöông.

Chöùng minh ñònh lyù naøy khaù ñôn giaûn.

Ví duï1:

Heä $\begin{cases}x_1-3x_2-x_3+2x_4=3\\3x_1+5x_2+9x_3-4x_4=-8,\\4x_1-3x_2+5x_3+7x_4=14\end{cases}$ $\begin{bmatrix}1&-3&-1&2&3\\3&5&9&-4&-8\\4&-3&5&7&14\end{bmatrix}\to\ldots\to$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & 12 & -10 & -17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{-76}{9} & \frac{-181}{9} \end{bmatrix}$$

Vay he ñau töông ñöông: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 9x_2 - 9x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_3 - \frac{76}{9}x_4 = -\frac{181}{9} \end{cases}$

va ta tìm nghiem tren he ñôn gian nay de dang hôn nhieu.

Vay sau höu han cac phep bien ñoi sô cap tren tran $A_{m,,n}$, ta thu ñöôc ma tran töông ñöông, ma dang cua ma tran sau cung $A^{/}$ co dang bac thang (nhöng he so khac zero tao thanh bac thang rut gon).

<u>*Ñònh nghóa ma tran bac thang:*</u> $R \in M_{m,,n}(R)$ ñöôc goi la ma tran bac thang rut gon neu cac ñieu kien sau ñay ñöôc thoa:

i/ Cac dong zero (neu co) phai ô ben döôi cac dong khac zero (neu co).

ii/ Phan tö ñau tien khac 0 tren cac dong khac zero (neu co) la so 1, va ben döôi cot cua so mot nay tat ca ñeu bang 0.

Ví du: ma tran bac thang co dang nhö sau: $\begin{bmatrix} \underline{1} & ´ & ´ & M & ´ \\ 0 & \underline{1} & ´ & M & ´ \\ 0 & 0 & \underline{1} & M & ´ \\ 0 & 0 & M & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}$

<u>*Ñònh ly:*</u> Moi ma tran ñeu töông ñöông dong vôi ma tran co dang bac thang rut gon duy nhat.

<u>*Ví du2:*</u> A= $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ =B

B la la dang ma tran bac thang rut gon töông ñöông vôi A.

Bay giô neu goi x, y, z la nghiem cua $\begin{cases} 0x + 2y - 4z = 0 \\ -1x - 4y + 5z = 0 \\ 3x + 1y + 7z = 0 \\ 0x + 5y - 10z = 0 \\ 2x + 3y + 0z = 0 \end{cases}$ thì chung cung la nghiem cua

$\begin{cases} 1x + 3z = 0 \\ 1y - 2z = 0 \end{cases}$ va nghiem nay la: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$.

Luc nay ta ñònh nghóa hang ma tran nhö sau:

<u>*Ñònh nghóa haïng cuûa ma traän:*</u> Soá haøng khaùc zero cuûa ma traän daïng baäc thang ruùt goïn cuûa ma traän A ñöôïc goïi laø <u>haïng cuûa ma traän A</u>. Kyù hieäu laø r(A), ñoâi khi coøn kí hieäu laø rank(A).
Ngöôøi ta coøn ñònh nghóa haïng cuûa ma traän laø baäc lôùn nhaát cuûa moät <u>ñònh thöùc con naøo ñoù</u> khaùc zero (ñöôïc trích ra töø A, k haøng, k coät baát kyø vaø moïi ñònh thöùc caáp k+1 trôû ñi ñeàu baèng 0). Ta coù theå chöùng minh hai ñònh nghóa naøy laø töông ñuông.

<u>*Ví duï3:*</u> A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, coù haïng laø 3, vì ñaây laø ma traän baäc thang chöùa ruùt goïn, vaø moïi ma traän baäc 4 ñeàu baèng 0, vì chöùa haøng thöù tö toaøn baèng 0. Ví duï naøy cho ta thaáy 2 ñònh nghóa veà haïng ôû treân laø töông ñöông.

<u>*Meänh ñeà:*</u> A $\in M_{m,,n}$(R) khi ñoù:
i/ $0 \le$ r(A) $\le \min(m,n)$.
ii/ Neáu A~B thì r(A) =r(B).
iii/ r(A) =0 <==> A=0.
iv/ r(A)=r(A^T)

2.5 Ñònh lyù Kronecker-Capelli:

<u>*Ñònh lyù:*</u> Heä $A_{m\times n}.x = b$ (1), trong ñoù: $[A'] = [A|b]$, ta coù caùc keát luaän:
a/ Ta coù hoaëc r(A) = r($A^/$) hoaëc r($A^/$)= r(A) +1.
b/ (1) coù nghieäm khi vaø chæ khi r(A)= r($A^/$), cuï theå:

- Neáu r(A)= r($A^/$)= n, (n laø soá aån) thì heä coù nghieäm duy nhaát.
- Coøn neáu r(A)= r($A^/$) < n, (n laø soá aån) thì heä coù voâ soá nghieäm.

Vôùi soá aån töï do laø n - r(A)
c/ r(A) < r($A^/$)= r(A) +1, heä voâ nghieäm.

<u>*Ví duï1:*</u> Döïa vaøo ñònh lyù Kronecker-Capelli, xeùt vò trí töông ñoái cuûa 4 maët phaúng trong R^3: chæ roõ caáu truùc nghieäm cuûa heä phöông trình neáu coù:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases},$$

ñaët A= $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}$, $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & -d_4 \end{array}\right]$

Do soá aån ít hôn soá phöông trình neân khoâng bao giôø coù r(A)= r([A|b])=4. Vaäy chæ coøn caùc tröôøng hôïp sau:
1/ r(A)= r([A|b])=3, $\exists!$ nghieäm laø moät ñieåm (x_0, y_0, z_0).
2/ r(A)=3 < r([A|b])=4, voâ nghieäm. Heä suy bieán thaønh ba maët phaúng (mp) caét nhau, vaø coù mp (4) // vôùi moät trong ba mp treân.
3/ r(A)=2 = r([A|b])=2, voâ soá nghieäm. Heä suy bieán thaønh hai maët phaúng caét nhau. Nghieäm naèm treân ñöôøng thaúng giao tuyeán.

4/ r(A)=2 < r([A|b])=3, voi nghieim. Hei suy biein thanh hai mat phang cat nhau, vai coi moit mp // vôi moit trong hai mp trein.
5/ r(A)=2 = r([A|b])=4, voi nghieim. Hei suy biein thanh hai mat phang cat nhau, coin hai mp // vôi moit trong hai mp trein.
6/ r(A)=1 = r([A|b])=1, voi soi nghieim. Hei suy biein thanh moit mat duy nhat, coin ba mp kia trung vôi mp trein.
7/ r(A)=1 < r([A|b])=2, voi nghieim. Hei suy biein thanh moit mat duy nhat, vai coi moit mp // vôi mp trein.
8/ r(A)=1 < r([A|b])=3, voi nghieim. Hei suy biein thanh moit mat duy nhat, vai coi hai mp // vôi mp trein.
9/ r(A)=1 < r([A|b])=4, voi nghieim. Hei suy biein thanh moit mat duy nhat, vai coi ba mp // vôi mp trein. ¢

<u>*Ví dui2*</u>: Giai hei: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \end{cases}$ <==> Ax=b (1)

Ta xeit caip 3: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

Xeit ñònh thöùc caip 2: $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, nein rank(A)=2. Xeit ma train môû roing A$^/$ ta coi:
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$,

=> r(A$^/$)=2=r. Vaiy hei coi nghieim (coi 2= n -r = 4-2 baic töï do)
$\begin{cases} x_1 - x_3 \quad = 2 + 2x_2 - x_4 \\ 3x_1 - 4x_3 = 4 + 6x_2 - 2x_4 \end{cases}$ ==> $x_1=2x_2 - 2x_4 + 4$ $\quad x_3 = -x_4+2$,

Caich 2: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ => keit quai.

<u>Nhain xeit:</u> $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(4,0,2,0)}_{x^{(0)}} + x_2\underbrace{(2,1,0,0)}_{x^{(1)}} + x_4\underbrace{(-2,0,-1,1)}_{x^{(2)}}$, ta coi $x^{(0)}$ lai N^0 cuia Ax=b, coin $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ lai N^0 cuia Ax=0, hay kieim chöùng!

<u>*Ví dui3*</u>: Giai vai biein luain hei phöông trình theo tham soi m:

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right] \to$ Neiu m-1=0 thì

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\to \text{He co vo so nghiem}$$

Neu m-1 $\neq$ 0 thì tiep tuc bien ñoi.

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&m\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&1&1&1+m\end{array}\right]\dots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&m+1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&m+3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&m+2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&m+3\end{array}\right]$$

Tom lai:
- m $\neq$ 1 va m $\neq$ -3 he vo nghiem.
- m = -3 he duy nhat nghiem x = y = z = -1.
- m =1 he vo so nghiem.

__Ví du 4__: Giai va bien luan he phöông trình theo cac thong so a,b:

$$\begin{cases} bx + ay + z = 1\\ (2b-1)x + ay + 3z = 1\\ bx + ay + (b+3)z = 1\end{cases}$$

Giai:

$$\begin{array}{ccc} z & y & x \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}1&a&b&1\\3&a&2b-1&1\\b+3&a&b&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&a&b&1\\0&-2a&-b-1&-2\\0&a(-b-2)&-b(b+2)&-b-2\end{bmatrix}$$

a/ b $\neq$ -2: => $\begin{bmatrix}1&a&b&1\\0&2a&b+1&2\\0&-a&-b&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&a&b&1\\0&-a&-b&-1\\0&0&-b+1&0\end{bmatrix}$

=> $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&a&b&1\\0&0&-b+1&0\end{bmatrix}$

b $\neq$ 1, a $\neq$ 0: => N^0 = (0, 1/a, 0) duy nhat nghiem.

b =1 => $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{bmatrix}1&a&1&1\\0&-a&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&a&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$, r(A)=2=r(A$'$)<n=3

==>Vo so N^0, khong gian nghiem la ñöông thang.

b/ b = -2: => $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{bmatrix}1&a&-2&1\\0&2a&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&-1&2a&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$, r(A)=2=r(A$'$)<n=3

==>Vo so N^0, khong gian nghiem la ñöông thang.

Tom lai:
- b $\neq$ 1, b $\neq$ -2, a $\neq$ 0: => N^0 = (0, 1/a, 0) duy nhat nghiem.
- b $\neq$ 1, b $\neq$ -2, a = 0: => Vo N^0.

• b = 1, Voi so N^0, khong gian nghiem la ñöông thang..

• b = -2, Voi so N^0, khong gian nghiem la ñöông thang.

That ra ta co $2^3 = 8$ tröông hôp, rut ve $\to 6$ tröông hôp sau, nhöng thu ve chæ co 4 tröông hôp tom tat ô tren:

1/ $a = 0, b \neq 1, b \neq -2$

2/ -- $b = 1$

3/ -- $b = -2$

4/ $a \neq 0, b \neq 1, b \neq -2$

5/ -- $b = 1$

6/ -- $b = -2$

Cach khac: $A = \begin{bmatrix} b & a & 1 \\ 2b-1 & a & 3 \\ b & a & b+3 \end{bmatrix}$ (xem chöông 2, tính ñình thöc)

$$\begin{vmatrix} b & a & 1 \\ 2b-1 & a & 3 \\ b & a & b+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 1 \\ -b-1 & -2a & 0 \\ -2b-b^2 & -2a-ab & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -b-1 & -2 \\ -2b-b^2 & -2-b \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A) = -b^2 a - ab + 2a = -a(b+2)(b-1)$. Ta the cac gia trò b=1, b= -2, a=0 vao phöông trình va ly luan töông tö nhö tren ta se co ket qua töông tö.

Ví du 5: Giai, bien luan he phöông trình theo tham so λ: $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$

Giai:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \text{-->} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda^2+1 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$

a/ $\lambda \neq 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \text{-->} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \text{-->}$$

$$\text{-->} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

va $\lambda \neq -2$: => N^0 duy nhat nghiem: $\left\{ x = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}, y = \dfrac{1}{\lambda+2}, z = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \right\}$

$\lambda = -2$: --> Voi N^0

b/ $\lambda = 1$:--> $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda^2+1 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ N^0 la mp.

<u>Caùch khaùc:</u> $A = \begin{bmatrix} l & 1 & 1 \\ 1 & l & 1 \\ 1 & 1 & l \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = l^3 - 3l + 2 = (l-1)^2(l+2)$

• λ = 1:--> $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ coù N^0 laø mp.

• λ = -2:--> $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

--> Voâ N^0.

• λ ≠ -2 vaø λ ≠ 1, duy nhaát nghieäm.

2.6 Phöông phaùp khöû Gauss:

Ñeå giaûi heä phöông trình tuyeán tính, ta duøng caùc pheùp bieán ñoåi sô caáp, ñöa heä veà moät heä môùi töông ñöông coù daïng baäc thang, sau ñoù duøng ñònh lyù Cronecker-Capelli ñeå xem heä coù nghieäm hay khoâng? Neáu coù ta tìm taäp nghieäm baèng caùch theá töø döôùi leân treân ñeå giaûi.

<u>*Ví duï 1*</u>: Giaûi heä phöông trình:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$, aùp pheùp bieán ñoåi sô caáp vaøo, ta coù:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 4 \\ \quad +6x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 4 \\ \quad\quad +9x_3 = -21 \end{cases}$$

Ta thaáy ngay r(A)= r(A/)=r=3=n (coù duy nhaát nghieäm),

theá töø döôùi leân treân ta coù heä duy nhaát nghieäm: x=$\left(0; \frac{5}{3}; \frac{-7}{3}\right)$.

Trong quaù trình bieán ñoåi ta chæ tính toaùn treân caùc heä soá neân baét ñaàu töø ñaây, ñeå tieän ta chæ bieåu dieãn ma traän môû roäng cho caùc pheùp bieán ñoåi sô caáp maø thoâi.

<u>*Ví duï 2*</u>: Giaûi heä phöông trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 6 & 6 \end{array}\right] \to$$

$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow$ heä treân voâ nghieäm r(A)=2 < r(A/)=3. ¢

<u>*Ví duï 3*</u>: Giaûi heä phöông trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

Ta bien ñoi: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right]$, ñoi vò trí x_2 va x_3:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_2} \end{array} \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -9 & -12 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Ta thay ngay r(A)= r(A/)=r=3 = n=3 (co duy nhat nghiem), x_2 =2,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

==> x_3 =3, x_1 =1,

Ví du 4: Cho he: Ax=b <==> $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -9 \\ -6 & -7 & 4 & -5 & 12 \end{bmatrix} . x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$ (1)

Tìm ñieu kien cua b ñe (1) co nghiem, tìm cau truc nghiem cua (1). Sinh vien hay kiem chöng ket qua sau: cau truc nghiem la

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \underbrace{(b_3 + b_1,\ b_2 - 2b_3 - 3b_1,\ 0,\ b_3 - b_2 + 3b_1,\ 0)}_{x^{(0)}} +$$

$+ x_4 \underbrace{(-3, 6, 1, -4, 0)}_{x^{(1)}} + x_5 \underbrace{(3, -2, -2, 0, 1)}_{x^{(2)}}$, trong ño: $b_4 = -3b_1 + 2b_2$, $b_5 = 3b_3 - 2b_2$, ta co $x^{(0)}$ la N^0 rieng cua Ax=b, con $x_4 x^{(1)} + x_5 x^{(2)}$ la N^0 tong quat cua Ax=0, trong ño : $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ la 2 N^0 rieng ÑLTT cua Ax=0, hay kiem chöng!

Chu y co the co nhieu ñap so bieu dien khac nhau. ¢

Ñònh ly: Tap bo (x_1, x_2, x_3,.....,x_n) cua he thuan nhat tao thanh mot khong gian vectô.

Chöng minh danh cho Hoc Sinh.

2.7 Nghiem cua he thuan nhat:

Xet he thuan nhat:

$$(4)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_{m \times n} . x = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ñònh ly: Mot he thuan nhat cac phöông trình tuyen tính vôi so an nhieu hôn so phöông trình (m < n), co mot nghiem khac 0 (nghiem khong tam thöông). Khong gian nghiem la mot khong gian con cua R^n.

Do ap dung ñònh ly Kronecker-Cappeli ta luon co r(A)= r(A/) < n.

Vì A/ =A ==> r(A)= r(A/) ≤ min (m,n) = m < n.

2.8 Ma tran nghòch ñao:

Ñònh nghia:

i/ Ma tran vuong A^{-1} goi la ma tran nghòch ñao cua A $\in M_n(R)$ neu $A.A^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

ii/ A kha ñao, k la la so nguyen döông, ta ñònh nghia: $\left(A^k\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^k$

Ví du1: $A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

ta co: AB=BA =I, nen $A^{-3}=\left(A^{-1}\right)^3=(B)^3=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 4\\ -20 & -29 & -34\\ 12 & 22 & 21\end{bmatrix}$

Hay $A^3=\begin{bmatrix}-139 & 172 & 252\\ -12 & 15 & 22\\ 92 & -114 & -167\end{bmatrix}\Rightarrow\left(A^3\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -4\\ -20 & -29 & -34\\ 12 & 22 & 21\end{bmatrix}$

Ñònh ly: Neu A, B $\in M_n$ (R) la nhöng ma tran kha ñao thì:

i/ $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$, $(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$, c ≠0 (∈R).

2i/ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3i/ $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

Ví du2: $A\in M_{n\times n}$, vôi $|A|\neq 0$, tìm ma tran nghòch ñao cua A. Biet

$$A^2+3A-2I_n=0\Leftrightarrow A\left(\frac{A+3I_n}{2}\right)=\left(\frac{A+3I_n}{2}\right)A=I_n\Rightarrow A^{-1}=\frac{A+3I_n}{2}$$

Ví du3: Vôi $P=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$, thì $P^{-1}=P^T=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$,

$P^n=\begin{bmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$ va $P^{-n}=\begin{bmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$. SV hay kiem tra.

Ví du4: Tìm nghịch ñảo ma trận khối P, với A, D la 2 ma tran vuong, $P=\left[\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right]$, thì $P^{-1}=\left[\begin{array}{c|c}U & V\\ \hline Y & Z\end{array}\right]$, vôi ñk:A va $\left(D-CA^{-1}B\right)$ kha ñao. Thì

$Z=\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}$, $Y=-ZCA^{-1}$, E ma tran ñôn vò.

$U=A^{-1}-A^{-1}BY$ $V=-A^{-1}BZ$, ta dung PBĐSC ñe chứng minh:

Viet lai: $\left[\begin{array}{cc|cc}A & B & E & 0\\ \hline C & D & 0 & E\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}I & A^{-1}B & A^{-1} & 0\\ \hline C & D & 0 & E\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & E \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I & -ZCA^{-1} & ZE \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I & Y & Z \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1}-A^{-1}BY & -A^{-1}BZ \\ \hline 0 & I & Y & Z \end{array}\right] ¢$$

Öùng duïng: Tuy ma traän P coù kích thöôùc lôùn, nhöng neáu A, B, C, D coù kích thöôùc £ 4 thì ta coù theå duøng maùy tính Vinacal-570MS ñeå tính nghòch ñaûo moät ma traän p Î M_7 nhö sau: $p=\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right]$ trong ñoù:

a= $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 8 & -3 & 6 & 7 \\ 5 & -6 & -8 & 3 \end{bmatrix}$ b= $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -3 \\ 0 & -9 & 7 \\ 9 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ c= $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -5 & -5 \\ 2 & 9 & -7 & 8 \end{bmatrix}$ d= $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vaäy p= $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 7 & 0 & -3 \\ 8 & -3 & 6 & 7 & 0 & -9 & 7 \\ 5 & -6 & -8 & 3 & 9 & -4 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & -5 & -5 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 9 & -7 & 8 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ta tìm p^{-1} theo u, v, y, z nhö coâng thöùc ôû treân. Baám maùy

Vinacal-570MS ñeå tìm: $p^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} u & v \\ \hline y & z \end{array}\right]$,

ta coù caùc keát quaû sau:

Vaøo döõ lieäu	Pheùp tính trong maùy:
a ® A, b ® B, c ® C	$CA^{-1}B = Ans$
vaøo d ® C	$(C - Ans)^{-1} = \boxed{z} = Ans$
Vaøo laïi c ® C	$-Ans.C.A^{-1} = \boxed{y} = Ans$
	$A^{-1} - A^{-1}.B.Ans = \boxed{u}$
Goïi laïi	$CA^{-1}B = Ans$
vaøo laïi d ® C	$(C - Ans)^{-1} = \boxed{z} = Ans$
	$A^{-1}.B.Ans = \boxed{v}$

z= $\begin{bmatrix} -.02558996939 & -.007551767397 & -.01229225336 \\ .08911661385 & -.02802652057 & .01338790535 \\ .03204989561 & .08191518749 & -.07316809409 \end{bmatrix}$

$$y=\begin{bmatrix} .06077997755 & .03531813624 & -.03737055716 & .04874101644 \\ -.1019322193 & .06809725267 & -.02447797321 & -.003937335289 \\ .1943687315 & -.2026134746 & .006990222436 & -.06203466756 \end{bmatrix}$$

$$u=\begin{bmatrix} -.2613716872 & .1918852650 & .04989510095 & .04635154997 \\ .1055980551 & -.0871006920 & -.0029668475 & -.07339936831 \\ .05911016262 & .00068289824 & .02110192880 & -.04276413227 \\ -.0321234867 & .0329554301 & .02801339445 & .009197277785 \end{bmatrix}$$

$$v=\begin{bmatrix} -.07996159374 & .01494619043 & -.04299989484 \\ -.003733329593 & -.06928648141 & -.00509269008 \\ -.00238972048 & .00042655735 & .04113166336 \\ .00930440410 & .07080809797 & -.07867667123 \end{bmatrix}$$

Ví du5: Cho $a := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $b := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c := [-1 \quad 1 \quad 5]$, d=[3]

tìm ma tran $y=-zca^{-1}$ với $z=\left(d-ca^{-1}b\right)^{-1}$

Ta xep chung lai thanh ma tran bac 4: $g := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, bam may

ñe co: $g^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-4}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{8}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{8}{25} & \frac{27}{25} & \frac{9}{25} & \frac{-2}{25} \\ \frac{-7}{25} & \frac{-33}{25} & \frac{-11}{25} & \frac{8}{25} \end{bmatrix}$ Vay y= $\begin{bmatrix} \frac{-7}{25} & \frac{-33}{25} & \frac{-11}{25} \end{bmatrix}$

Menh ñe: Neu A $\in M_n$ (R), cac phat bieu sau la töông ñöông:

i/ A la ma tran kha ñao.

ii/ A~I.

iii/ r(A)= n.

iv/ A la tích höu han cac ma tran sô cap.

2.9 Öng dung phep bien ñoi sô cap ñe tìm ma tran nghòch ñao:

Vì ñac tính cua phep bien ñoi sô cap, co the bien ñoi ma tran vuong thanh ma tran ñôn vò neu ma tran vuong ño khong bò thoai hoa, lôi dung ñieu nay va do tính chat ma tran nghòch ñao $A.A^{-1}=I_n=A^{-1}.A$, ta co the söû dung cac phep bien doi ngöôc lai ñe bien ma tran ñôn vò thanh lai ma tran ban ñau va ñao lai nhö sô ño sau.

$$\left(A|I_n\right) \to \mathbf{L}\ \mathbf{L} \to \left(I_n \mid A^{-1}\right)$$

Ví du 1: Tìm ma tran nghòch ñao cua

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&2&5\end{bmatrix}\to\left(A|I_n\right)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&2&0&1&0\\3&2&5&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-3d_1+d_3}$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&2&0&1&0\\0&-4&-4&-3&0&1\end{array}\right]\to \text{ chu y: } S_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3/4}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&2&0&1&0\\0&-1&-1&-\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right]\xrightarrow{d_2\leftrightarrow(-d_3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&-1&2&0&1&0\end{array}\right] \text{ta co: } S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$S_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow{d_2+d_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&1&\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&0&3&\frac{3}{4}&1&-\frac{1}{4}\end{array}\right]\xrightarrow{d_3/3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{3}&\frac{7}{12}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{array}\right]$$

ta co:

$$S_4=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}, S_5=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}&-\frac{1}{3}&\frac{7}{12}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

Ô ñay ta co the kiem chöng A la tích höu han cac ma tran sô cap nhö sau: Theo menh ñe ña hoc ô tren, can cö vao phep bien ñoi sô cap ô tren ta co lan lööt cac ma tran sô cap S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, sao cho:

I = S_5. S_4. S_3. S_2. S_1. A <=>

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}}_{S_5}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}_{S_4}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{S_3}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}}_{S_2}\times$$

$$\times\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}}_{S_1}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&2&5\end{bmatrix}}_{A}$$. Vay $A=S_1^{-1}S_2^{-1}S_3^{-1}S_4^{-1}S_5^{-1}$, kiem chöng! ¢ Ta cung co the dung

PBÑSC tren dong ñe tính $A^{-1}B$ nhö sau:

Ví du 1: Ñe tính ma tran tích cua $A^{-1}B$, ta thiet lap $\left[A\middle|B\right]$, sau ño dung PBÑSC tren dong ñe ñöa $\left[A\middle|B\right]\to .....\to\left[I\middle|A^{-1}B\right]$.

Đặc biệt B= ma trận cột, thì giải Ax=B tương ñương với dung PBĐSC ñe bien $\left[A\middle|B\right]\to ...\to\left[I\middle|A^{-1}B=x\right]$. Xem

Ma tran $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$, tính $A^{-1}B$. Ta thiet lap ma tran:

$$\left[A\middle|B\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&1&0\\1&0&1&3&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&1&0\\0&1&-1&-2&0&-1\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&1&0\\0&0&2&4&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&0&0&1&-1\\0&0&2&4&1&1\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&2&-1&1\\0&2&0&0&1&-1\\0&0&2&4&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]=\left[I\middle|A^{-1}B\right]$$

Vay $A^{-1}B=\left[\begin{array}{c|cc}1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$. Đặc biệt ở ví dụ nay, bay giờ giải: Ax=B với

$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ thì $A^{-1}B=x=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ chính la cot mot cua ket qua $A^{-1}B$ ô tren ¢

BAI TAP

1/ Cho $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0&10\\3&6&1&8\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&6&5\\3&0&8&9\end{bmatrix}$

a/ Tính 2A-3B.

b/ Tính X sao cho A+X=B.

2/ Cho $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&5&-7\\0&9&-8&2\end{bmatrix}$ va $B=\begin{bmatrix}-2&6&3&5\\0&8&2&9\end{bmatrix}$

a/ Tính X sao cho 2A-3X=B.

b/ Tính B^T, A B^T, BA^T.

3/ Cho 2 ma traän $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & 0\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, vaø $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\end{bmatrix}$

a/ Tính A.B vaø det(A.B).

b/ Tính B.A vaø det(B.A)

4/ Tính ma traän nghòch ñaûo caùc ma traän sau:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & -6 & 0\\ 7 & -2 & 7\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/2\\ 2/5 & 1/4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1 & -5 & \frac{-7}{3} & \frac{-2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4 & -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5/ Tính caùc ma traän X sao cho:

$$\mathbf{a/}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{b)}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ \mathbf{c/}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{bmatrix}$$

6/ Tìm X sao cho AX=B nhö sau:

a/ $\begin{bmatrix}2 & 3 & 11 & 5\\ 1 & 1 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 4\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -3\\ -3\end{bmatrix}$ b/ $\begin{bmatrix}2 & -3 & 5 & 7\\ 4 & -6 & 2 & 3\\ 2 & -3 & -11 & -15\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

c/ $\begin{bmatrix}2 & 5 & -8\\ 4 & 3 & -9\\ 2 & 3 & -5\\ 1 & 8 & -7\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}8\\ 9\\ 7\\ 12\end{bmatrix}$ d/ $\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 5\\ 9 & 1 & 4 & -5\\ 2 & 2 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 6 & -1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$

7/ Giaûi vaø bieän luaän theo m caùc heä phöông trình sau:

a/ $\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+y-2z=2\\ mx+y+4z=2\end{cases}$ b/ $\begin{cases}mx+y+z=0\\ x+my+z=0\\ x+my+z=m+1\end{cases}$ c/ $\begin{cases}mx+y+z=1\\ x+my+z=m\\ x+my+z=m^2\end{cases}$

d/ $\begin{cases}x+y+(1-m)z=m+2\\ (1-m)x-y+2z=0\\ 2x-my+3z=m+2\end{cases}$ e/ $\begin{cases}x+y+z+t=3\\ x+y=4\\ x+y+mz+t=2\end{cases}$

f/ $\begin{cases}mx+y+z=m\\ 2x+(m+1)y+(m+1)z=(m+1)\\ x+y+mz=1\end{cases}$

8/ Ngöôøi ta ñònh nghóa haøm muõ ma traän (gioáng nhö haøm muõ thöïc) nhö sau: cho $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & a\end{bmatrix}$, a,b ∈ R,

$$e^{A}=I_2+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\ldots+\frac{A^n}{n!}+\ldots .$$

Tính. e^A. Trong ñoù $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ laø ma traän vuoâng ñôn vò.

9/ Giaû söû A laø ma traän vuoâng vaø coù k ≥ sao cho $A^k=0$.

a/ Cm B=I-A khaû ñaûo vaø tính B^{-1} theo I vaø A.

b/ Cm C=I+A khaû ñaûo vaø tính C^{-1} theo I vaø A.

9/ Cho $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&2&4\\5&1&2\\3&-1&1\end{bmatrix}$. Tìm S_1, S_2, S_3: khaû ñaûo $\in M_3(R)$: $E=S_1S_2S_3$.

10/ Cho $f(x)=x^3-7x+5$, $g(x)=2x^3+3x-4$, $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

Tính f(A), g(A), f(A).g(A), ví duï $g(A)=2A^3+3A-4I$, trong ñoù I laø ma traän ñôn vò.

CHÖÔNG 2
ÑÒNH THÖÙC
BAØI 1: ÑÒNH THÖÙC

1.1 Ñònh nghóa:

<u>*Hoaùn vò:*</u> Ta ñaõ bieát ôû phoå thoâng, moät hoaùn vò cuûa n soá töï nhieân 1,2,3,..., n goïi laø moät hoaùn vò baäc n (laø song aùnh: $n \mapsto f(n)$).

<u>*Nghòch theá:*</u> Cho hoaùn vò $(i_1,i_2,i_3,\ldots,i_n)$, caëp soá (i_j,i_k) trong hoaùn vò ñoù taïo thaønh moät nghòch theá neáu $i_j>i_k$ vaø i_j ñöùng tröôùc (beân traùi) i_k trong hoaùn vò ñoù.

<u>*Ví duï1:*</u> Trong hoaùn vò 3241 ta coù 4 nghòch theá (3,2), (3,1), (2,1), (4,1),

Moät hoaùn vò ñöôïc goïi laø chaün (leû), neáu soá nghòch theá trong hoaùn vò ñoù laø chaün (leû)

- Ñònh thöùc caáp 2 laø moät soá xaùc ñònh nhö sau:

$$\text{(1)}\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

Soá haïng $a_{11}a_{22}$ coù daáu döông do hoaùn vò (1,2) chaün.

Soá haïng $a_{12}a_{21}$ coù daáu aâm do hoaùn vò (2,1) leû.

<u>*Ví duï 2*</u>: $\begin{vmatrix}4&-5\\-1&-2\end{vmatrix}=4(-2)-(-5)(-1)=-13$.

- Ñònh thöùc caáp 3 laø moät soá xaùc ñònh nhö sau:

$$\text{(2)}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1.\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1.\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1.\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}$$

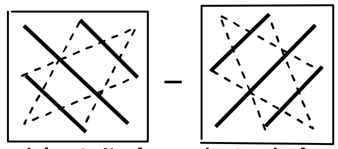
$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1$$

ví duï nhö soá haïng $a_1b_3c_2$ coù daáu aâm do hoaùn vò (1,3,2) leû.

$-a_3b_2c_1$ coù 3 nghòch theá neân mang daáu aâm.

Ñeå deã nhôù ta coù qui taéc Sarius sau:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$



Qui tac nay con ñöôc goi la 3 ñöông cheo döông trö 3 ñöông cheo am.

$$\textbf{(3)} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

- Ñònh thöc cap n: Xet ñònh thöc cap n la bang sau ñay:

$$D(A) = |A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ñay la mot ham nhieu bien $f : R^n \times R^n \to R$

- Ñònh thöc con bu cua phan tö a_{ij}, ky hieu la M_{ij}, la ñònh thöc bac (n-1) nhan ñöôc tö D(A) bang cach xoa ñi dong thö i va cot thö j.
- Phan bu ñai so cua phan tö a_{ij}, ky hieu la A_{ij}, ñöôc ñònh nghóa nhö sau:

$\overline{A} = \left[A_{ij}\right]$ trong ño $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

1.2 Ñònh ly:

Cong thöc trien khai Laplace, khai trien hang thö i, nhö sau:

$$\textbf{(*)}\ D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

khai trien cot thö j, nhö sau:

$$\textbf{(*)}\ D(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Ô dang (3) ô tren, khai trien cot, ta co

$$\textbf{(**)} \quad D(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

<u>Ví du2:</u>

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Ap dung cong thöc laplace, khai trien theo cot thö ba ta co:

$$\Delta = (-1)^{2+3}.1.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} \right) = 0.$$

1.3 Cac tính chat cua ñònh thöc:

Ñe minh hoa cho cac tính chat cua ñònh thöc, ta minh hoa cho ñònh thöc bac 3, va ñònh thöc bac n van co hieu löc töông tö. Cac tính chat phat bieu cho hang hay cot ñeu co vai tro nhö nhau. Ñe kiem chöng cac tính chat sau ta chæ can döa vao ñònh nghóa.

Tính chat 1: Neu ñoi hang va cot cho nhau thì gia trò ñònh thöc khong ñoi. $|A| = |A^T|$. (A_i la phan bu ñai so cua a_i)

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$ do khai trien theo hang 1

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$ do khai trien theo cot 1

Ví du1: $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}$ = 5 -6 = -1

Ví du2: $\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix} =$

= [1.1.3+0+(-2) (-1) (-2)]-[3.(-2)1+1(-1)1]=6

nghóa la: det(A) =det(A^T)

Tính chat 2: Neu ñoi cho hai hang (cot) cho nhau thì gia trò ñònh thöc ñoi dau. (B_i la phan bu ñai so cua b_i)

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$ khai trien cot 2, co dau (-, +, -)

$$\begin{vmatrix}b_1 & a_1 & c_1\\ b_2 & a_2 & c_2\\ b_3 & a_3 & c_3\end{vmatrix} = b_1B_1^{/} + b_2B_2^{/} + b_3B_3^{/}$$ khai trien cot 1, co dau (+, -, +)

nen $B_i^{/} = -B_i$

Ví du3: $\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}$

(ñoi cho cot 1 va cot 2 thì dau ñoi).

He qua: Co ít nhat hai hang (cot) giong nhau thì ñònh thöc bang 0.

Xem lai ví du 2 muc 1.2.

Tính chat 3: Thöa so chung cua mot hang (cot) thì ñöôc mang ra ngoai.

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = kb_1B_1 + kb_2B_2 + kb_3B_3 =$$

$$= k\left(b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3\right) = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

_Ví du 5_: $\begin{vmatrix} 3\times 1 & 0 & -2 \\ 3\times(-2) & 1 & 1 \\ 3\times 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

_Ví du 6_: $B = aA \Rightarrow |B| = a^n|A|$

$$\begin{vmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \vdots & \cdots & aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} & & \cdots & aa_{2n} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ aa_{n1} & aa_{n2} & \cdots & \cdots & aa_{nn} \end{vmatrix} = a^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tính chat 4: Neu co mot hang (hay cot) ma moi so hang la tong cua 2 so hang thanh phan thì ñònh thöc co the tach ra thanh tong hai ñònh thöc.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3\right) + \left(d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3\right)$$

_Ví du 7_: $\begin{vmatrix} 3+1 & 0 & -2 \\ 5+(-2) & 1 & 1 \\ 4+3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Ví du tong quat: Gia sö ñònh thöc bac 3, cot mot la tong 2 so hang A, va B, cot hai la tong 2 so hang C, va D, cot ba la tong 2 so hang E, va F.

$$\begin{vmatrix} A+B & C+D & E+F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & C & F \end{vmatrix}$$

(co 2×2×2 =2^3=8 thanh phan tach theo cot)

$$\begin{vmatrix} A & D & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & D & F \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} B & C & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & F \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} B & D & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & D & F \end{vmatrix}$$

Va $\begin{vmatrix} A+B+C & D+E+F & G+H \end{vmatrix}$ (co 3×3×2=18 thanh phan)

Tính chat 5: He qua cua cac tính chat tren la ñònh thöc se khong ñoi neu ta cong vao mot hang (hay cot) vôi boi so mot hang khac (sau khi ña nhan vôi mot hang so).

Ta thöông dung tính chat 5 ñe tính gia trò ñònh thöc.

$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0$$

_Ví du 10_: Lấy lại ví dụ trước, tính ñònh thức bậc 5:

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \boxed{3} & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & \boxed{1} & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times -14 = 42$$

Tính chat 6: Tích vo höông cua mot hang vôi phan bu ñai so cua phan töi tren mot hang khac thì bang 0.

Trong khi theo ñònh ly Laplace, tích vo höông cua mot hang vôi phan bu ñai so cua chính hang ño, thì bang det(A) nhö (**) va (***) ô tren (khai trien Laplace).

That vay coi ñònh thöc co cot 1 va cot 3 giong nhau, khai trien theo cot 1 va chu y cac ky hieu ña ñöôc ñònh nghóa ta co:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$$

Töông tö: $a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \det(A)$, $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$ .....

Ví du: nhan vo höông cua cot 1 vôi phan bu ñai so cua cot 2 cua ma tran sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix} = -3 + 7 - 4 = 0$$

CHÖÔNG 3
KHONG GIAN VECTÔ (KGVT)
BAI 1: KGVT

1.1 Ñònh nghóa: Khong gian vectô (KGVT) la cap (V, R), R la tröông so thöc, V la tap cac phan tö vectô, trang bò 2 phep toan cong va nhan nhö sau:

(V,V) $\to$ V (R,V) $\to$ V

(x_1, x_2) **a** $x_1 + x_2$ (λ, x) **a** $\lambda.x$.

Va hai phep toan nay phai thoa tam tính chat sau:

1/ $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

2/ $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$.

3/ $\exists\, !\, 0 \in V$: $0+x=x+0=x$.

4/ $\exists\, (-x) \in V$: $-x+x = x - x = 0$.

5/ $(\lambda_1.\lambda_2)\, x = \lambda_1.(\lambda_2 x)$.

6/ $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$.

7/ $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$.

8/ $1.x = x$.

Mot vai tính chat: co the suy ra tö ñònh nghóa:

- $\forall v \in V, \quad -v = (-1).v$

- $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \forall a \in \boldsymbol{R}, \quad (-a\ \boldsymbol{v}) = (-a)\boldsymbol{v} = a(-\boldsymbol{v})$
- $\forall a \in \boldsymbol{R}, \quad a.\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
- Neu αv=0 thì α =0 hay v=0.
- $\begin{cases} a\ \boldsymbol{v} = b\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \end{cases} \Rightarrow a = b$, $\begin{cases} a\ \boldsymbol{v} = a\ \boldsymbol{u} \\ a \neq \boldsymbol{0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$

Ví du1: Tap cac vectô hình hoc Euclid thong thöông tao thanh KGVT

Ví du2: Tap cac vectô $\{\vec{\boldsymbol{x}} : \vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{k}\vec{a}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}\}$, ($\vec{a}$ vectô co ñònh) tao thanh KGVT.

Ví du3: Tröông so thöc R la KGVT tren chính no.

Ñònh nghóa: Tap W, $\phi \neq$ W$\subset$ V ñöôc goi la khong gian con cua KGVT V neu cac phep toan cong va nhan cua V han che len W.

Ñònh ly: Tap W, $\phi \neq$ W$\subset$ V la khong gian con cua KGVT V neu va chæ neu $\forall$x,y $\in$ W, $\forall\alpha$, $\beta \in$ R, ta co αx + βy $\in$ W.

Ví du: trong R^n, W=$\left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T : \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \right\}$ la mot KGVT con cua R^n, trong ño A $\in$ $M_{m,n}$. De dang kiem chöng. Thöc ra ñay la mot ñònh ly:

1.3.1 To hôp tuyen tính (THTT):

Xet cac vectô A_1, A_2, ..., A_m $\in$ V va cac so thöc k_1, k_2, ..., k_m. Mot to hôp tuyen tính cua cac vectô A_1, A_2, ..., A_m la vectô:

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_m A_m = \sum_{i=1}^{i=m} k_i A_i$$

Ví du : Trong R^3: A_1 = (1, -1, 0), A_2 = (2, 1, -2), thì mot THTT cua chung la: A = 2 A_1 – A_2 = (2, -2, 0) – (2, 1, -2) = (0, -3, 2).

1.3.2 Phu thuoc tuyen tính(PTTT), ñoc lap tuyen tính (ÑLTT):

Ñònh nghóa: Cac vectô V_1, V_2, ..., V_m goi la phu thuoc tuyen tính neu ton tai cac so thöc k_1, k_2, ..., k_m. khong ñong thôi bang 0, sao cho:

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + \ldots + k_m V_m = 0$$

Neu cac vectô V_1, V_2, ..., V_m khong phu thuoc tuyen tính, ta noi chung ñoc lap tuyen tính.

Noi cach khac: V_1, V_2, ..., V_m goi la PTTT <==>

$k_1 V_1 + k_2 V_2 + \ldots + k_m V_m = 0$ va $\exists \boldsymbol{i} \in \overline{\boldsymbol{1,m}} \quad \boldsymbol{k_i} \neq \boldsymbol{0}$

Ñònh ly: Cac vectô V_1, V_2, ..., V_m la ñoc lap tuyen tính (ÑLTT)

<==> $k_1 V_1 + k_2 V_2 + \ldots + k_m V_m = 0$ ==> $k_1 = k_2 = \ldots\ldots k_m = 0$

ñònh ly ñöôc suy ra hien nhien, tö ñònh nghóa cua PTTT.

Ví du1: Cac vectô u = (1, -1, 0), v = (1, 3, -1), w = (5, 3, -2) la phu thuoc tuyen tính vì:

3u + 2v – w = 3 (1, -1, 0) + 2 (1,3-1) – (5,3, -2) = (0,0,0)

Ví du2: Cac vectô u = (1, -2, 1), v = (2, 1, -1), w = (7, -4, 1) la phu thuoc tuyen tính vì:

au + bv +c w = (0,0,0) <==> $\begin{cases} a+2b+7c=0 \\ -2a+b-4c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$, xeùt

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to L \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, r(A)=2 < n=3, heä thuaàn nhaát coù nghieäm khoâng taàm thöôøng (nghieäm a, b, c khoâng ñoàng thôøi baèng khoâng), vaäy heä PTTT. Do ñoù ta coù ñònh lyù:

__Ñònh lyù__: Ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå caùc vectô $V_1, V_2, ..., V_m \in R^n$ laø PTTT laø rank $(V_1, V_2, ..., V_m) < m$.

Chuù yù: Ta luoân coù rank $(V_1, V_2, ..., V_m) \le \min(m,n)$

__Ví duï 3:__ Trong R^5, u = (1, 2, 3, 4,5), v = (-1,2,-3,4,5), w = (1,-2, 3, 4,-5). Ta coù m=3, n=5.

A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \to L \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, neân rank(A)=3=m, ÑLTT

- Taäp hôïp Vect$(A_1, A_2, ..., A_m)$ = $\langle A_1, A_2, ..., A_m \rangle$ =

  = $\left\{ \sum_{i=1}^{i=m} k_i A_i, k_i \in R \right\}$ laø moät KGVT con, sinh bôûi höõu haïn caùc vectô $A_1, A_2, ..., A_m$. Ñöôïc goïi laø toå hôïp tuyeán tính cuûa heä $A_1, A_2, ..., A_m$.

__Ví duï 10:__ W laø KGVT con cuûa R^4 goàm caùc vectô (x_1, x_2, x_3, x_4) thoûa:

$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+7x_3+x_4=0 \\ 4x_1+8x_2+13x_3+3x_4=0 \end{cases}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 13 & 3 \end{bmatrix} \to L \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$,

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-2,1,0,0) + x_4(-4,0,1,1)$.

Vaäy W=$\langle (-2,1,0,0), (-4,0,1,1) \rangle$.

__Ví duï 11__: Tìm cô sôû vaø soá chieàu cuûa khoâng gian nghieäm:

$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$, duøng PBÑSC: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = 0$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_1 = \frac{1}{3}(-4x_2 - x_3 - 3x_5) = -3x_3 - 5x_5$

$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle = \langle x_3(-3,2,1,0,0) + x_5(-5,3,0,0,1) \rangle$,

E = $\langle (-3,2,1,0,0), (-5,3,0,0,1) \rangle$, chöùng minh

E laø moät KGVT con (moät sieâu phaúng) cuûa R^5.

Ví duï 12: Tröng ra caáu truùc khoâng gian nghieäm cuûa heä phöông trình:

$$(1)\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \iff Ax=b$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to L \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_4 = 0, \begin{cases} x_3 = 3 - 4x_5 \\ x_2 = 2x_1 - x_5 + 1 \end{cases}$$

$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle = \langle x_1, 2x_1 - x_5 + 1, 3 - 4x_5, 0, x_5 \rangle =$

$= \underbrace{(0,1,3,0,0)}_{\vec{a}} + x_1 \underbrace{(1,2,0,0,0)}_{\vec{b}} + x_5 \underbrace{(0,-1,-4,0,1)}_{\vec{c}}$. Khoâng gian nghieäm laø 1 sieâu phaúng taïo bôûi 2 vectô $\vec{b}$ vaø $\vec{c}$ trong R^5 sau khi ñaõ tònh tieán ñi bôûi moät vectô $\vec{a}$. Nhöng ñaây coù phaûi laø moät KGVT ?

Thöïc ra ta seõ thaáy roõ hôn (ví duï phaàn sau): ô ñaây $\vec{a}$ chính laø moät nghieäm rieâng cuûa **(1)**, coøn $\vec{b}$, $\vec{c}$ chính laø moät cô sôû cuûa kerA (Ax=0). Vaø taát nhieân caùch bieåu dieãn naøy khoâng duy nhaát. Ô ví duï treân coù theå bieåu dieãn:

$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle = (0,2,7,0,-1) + a(1,2,0,0,0) + b(0,-1,-4,0,1)$

Meänh ñeà: Giaû söû $W_1 = \langle S_1 \rangle$, $W_2 = \langle S_2 \rangle \Rightarrow W_1 + W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

Ví duï 13: Trong R^4 cho $v_1 = (1,1,0,1), v_2 = (2,3,1,2), v_3 = (3,4,1,3)$,

Goïi $W_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$, $W_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$. Tìm ñieàu kieän ñeå

$v = (a,b,c,d) \in W = W_1 + W_2$. Nghiaõ laø tìm W.

Theo meänh ñeà treân ta coù $W = W_1 + W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, nghiaõ laø v laø toå hôïp tuyeán tính cuûa v_1, v_2, v_3, nghóa laø ta coù:

ton tai (a_1,a_2,a_3): $\begin{cases} a_1+2a_2+3a_3=a \\ a_1+3a_2+4a_3=b \\ \quad a_2+a_3=c \\ a_1+2a_2+3a_3=d \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 3 & 4 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{array}\right]$

$$\to \mathbf{L} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d-a \\ 0 & 0 & 0 & b-a-c \end{array}\right]$$

He phöông trình nay co nghiem neu va chæ neu $\begin{cases} b=a+c \\ d=a \end{cases}$, suy ra

$$W=W_1+W_2=\left\{(a,b,c,d)\in R^4 : b=a+c, d=a\right\}=\left\langle \underbrace{(1,1,0,1)}_{v_1},\underbrace{(0,1,1,0)}_{v_4} \right\rangle.$$

Phan tích them: $V_1=[v_1 \mid v_2 \mid v_3]=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

==> rank(V_1)=2, va $V_2=[v_1 \mid v_2]$, rank(V_2)=2, va lai ta co: $v_1+v_2=v_3$

$V_3=[v_1 \mid v_3]$, rank(V_3)=2, $V_4=[v_2 \mid v_3]$, rank(V_4)=2, nen

$W=W_1+W_2=\langle v_1,v_2\rangle=\langle v_1,v_3\rangle=\langle v_2,v_3\rangle=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

Sinh vien hay chöng minh cu the töng dau bang cua ñang thöc.

BAI 2: CÔ SÔ VA CHIEU KHONG GIAN

2.1 Cô sô va chieu kgvt:

Mot KGVT tong quat (V, R) co he höu han va sap thöù töï (ñöôc sap thöù töï). $P=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_p\}\subset V$ ñöôc goi la cô sô cua V neu va chæ neu he P nay ÑLTT va $\forall x\in V$ ñeu ñöôc sinh bôi P nghóa la ton tai duy nhat cac $\alpha_i \in$ R, ñe ta co:

$$x=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_px_p=\sum_{i=1}^{P} a_ix_i,$$

- Cac α_i goi la toa ño cua vectô x trong cô sô P, kí hieu: $[x]_P=(a_1,a_2,\ldots,a_p)^T=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$ va goi $[x]_P$ la toa ño cua x trong cô sô P.
- Noi khac ñi KGVT (V, R) ñöôc sinh ra bôi he P höu han, va luc nay ta noi KGVT (V, R) la höu han chieu va
- Co chieu la p, kí hieu dim(V)=p.
- KGVT sinh bôi he P la KGVT bao gom cac phan töû la toå hôp tuyen tính cac phan töû cua P.
- Trong R^n, $E=\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ la cô sô chính tac.

Ví duï 0: Trong R^2 cho x=(1,2) thì $[x]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ví duï 1: E laø khoâng gian nghieäm cuûa:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

trong ví duï tröôùc laø moät KGVT con cuûa R^5 coù dim(E) = 2. vaø cô sôû cuûa E laø P=$\{(-3,2,1,0,0),(-5,3,0,0,1)\}$.

Ñònh lyù: F, G laø hai KGVT con höõu haïn chieàu cuûa V ta coù:

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

Ví duï 7: Trong R^4 cho u=(1,0,1,0), v=(0,1,-1,0), w=(1,1,1,1), x=(0,0,1,0), y=(1,1,0,-1), F= <u,v,w>, G= <x,y>.

a/ Tìm dimF, dimG.

b/ Tìm kgvt con sinh ra F∩G. Tìm dim(F∩G).

c/ Tìm kgvt con sinh ra F+G. Töø ñoù suy ra dim(F+G).

Giaûi:

Sinh vieân Coù theå chöùng minh F+G, F∩G laø 2 khoâng gian con R^4.

a/ Vì u,v,w ÑLTT, neân dimF=3, vaø x, y ÑLTT, neân dimG=2

Ta seõ nghieäm laïi coâng thöùc: dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F∩G).

b/ Thaät ra tìm F∩G laø giao 2 sieâu phaúng au+bv+cw vaø dx+ey trong ñoù tìm a,b,c,d,e ∈R. Vaäy töø phöông trình: au+bv+cw = dx+ey.

$$\Leftrightarrow au + bv + cw + d(-x) + e(-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Giaûi heä naøy ta coù nghieäm: a=2, b=2, c=-1, d=-1, e=1,

vaäy moät N^0 laø: 2u+2v-w+x-y=0 hay 2u+2v-w= -x+y =(1,1,-1,-1)

==> <(1,1,-1,-1)> = F∩G, vaäy dim(F∩G)=1.

c/ Do meänh treân ta coù F+G= $\langle \langle u,v,w \rangle \cup \langle x,y \rangle \rangle = \langle u,v,w,x,y \rangle$ ta seõ chöùng minh F+G= <u,v,w,x,y> = <u,v,w,x> = < u,v,w,y >. Thaät vaäy

Vì x,y cuøng ÑLTT neân dim(G)=2. Nhöng cuøng coù u,v,w,x ÑLTT neân dim(F+G)≥ 4, maø dim R^4=4, neân dim(F+G)= 4, vaø

F+G= <u,v,w,x,y> = <u,v,w,x> = < u,v,w,y > =R^4. ¢

Ví duï 8: Trong R^4 cho hai heä phöông trình:(I): $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$, ñaët khoâng gian N^0 (I) laø F, vaø heä (II) $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$, ñaët khoâng gian N^0 (II) laø G, haõy tìm moät cô sôû cuûa $F \cap G$.

<u>Caùch 1:</u> Ta deã daøng tìm ñöôïc (tìm x_1 qua caùc bieán coøn laïi)

F = $\langle f_1 = (1,1,0,0),\ f_2 = (1,0,1,0),\ f_3 = (-1,0,0,1)\rangle$ hay bien ñoi ñe co:

F = $\langle u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0), w = (1,1,1,1)\rangle$, trong ño:

$u = f_2 = (1,0,1,0), v = f_1 - f_2 = (0,1,-1,0), w = f_1 + f_2 + f_3 = (1,1,1,1)$, dimF=3,

G = $\langle x = (1,1,0,-1), y = (0,0,1,0)\rangle$, do N^0 la: $(x_1, x_1, x_3, -x_1)$

dimG=2, Dö lieu nay töông tö ví du tren. Nen theo ket qua tren ta co: $F \cap G = \langle(1,1,-1,-1)\rangle$

Cach 2: Ta gop hai phöông trình : $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$

Ta de dang tìm ñöôc ker ma tran: $F \cap G = \langle(-1,-1,1,1)\rangle$. ¢

Ví du15: Tìm he phöông trình tuyen tính ma he nghiem lai trung vôi KGVT sinh bôi 3 vectô α_1, α_2,α_3: α_1=(-1,0,1,2), α_2=(3,4,-2,5), α_3=(1,4,0,9),

Giai:

Goi x=(x_1, x_2, x_3, x_4) $\in \langle a_1, a_2, a_3\rangle$,

co $\exists y_i$, $x = y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 + 3y_2 + y_3 = x_1 \\ \quad +4y_2 + 4y_3 = x_2 \\ y_1 - 2y_2 \qquad = x_3 \\ 2y_1 + 5y_2 + 9y_3 = x_4 \end{cases}$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_2 \\ 1 & -2 & 0 & x_3 \\ 2 & 5 & 9 & x_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 11 & 11 & 2x_1 + x_4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -4x_1 + x_2 - 4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -9x_1 - 11x_3 + x_4 \end{array}\right]$$ ==> r(A)=r(A,b)=2<3 ,

ñap so : $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 4x_3 \qquad = 0 \\ -9x_1 \qquad -11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, nghiem lai $a_3 = 2a_1 + a_2$

Ví du16: Cho hai he phöông trình:(I) $2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$, ñat khong gian N^0 (I) la F, va he (II) $\begin{cases} 0x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 8x_4 = 0 \\ 1x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases}$, ñat khong gian N^0 (II) la G, hay tìm mot cô sô cua $F \cap G$.

Cach 1: Ta de dang tìm ñöôc, tìm x_3 qua cac bien con lai:

F = $\langle f_1 = (1,0,-2,0),\ f_2 = (0,1,-2,0),\ f_3 = (0,0,-4,1)\rangle$, dimF=3

Tìm x_1, x_2, qua cac bien con lai:

G = $\langle g_1 = (0,1,7,-2), g_2 = (1,0,-8,1)\rangle$ dimG=2, dimF+G=4

==> dim $F \cap G$ = dim(F)+ dim(G)- dim(F+G)=3+2-4=1.

Ngoai ra ta co: $-3f_1 + 2f_2 + 1.f_3 = 2g_1 + 1.g_2 =$ (1, 2, 6, -3) vaiy <(1, 2, 6, -3)>= $F \cap G$

Caich 2: Ta dei daing tìm ñöôïc, tìm x_3 qua caic bien coin laii:

$F = \langle t_1 = (1,0,-2,0), t_2 = (0,1,-2,0), t_3 = (0,0,-4,1) \rangle$, hay

$F = \langle f_1 = t_1,\ f_2 = -t_2,\ f_3 = t_1 + t_2 - t_3 = (1,1,0,-1) \rangle$, dimF=3

Tìm x_3 qua caic bien coin laii:

$G = \langle g_1 = (2,1,-9,0), v = (1,0,-8,1) \rangle = \langle g_1,\ g_2 = (-1,-1,1,1) = v - g_1 \rangle$,

Vai ta coi: $-2f_1 + 1f_2 + 3f_3 = -g_1 - 3g_2$ vaiy <(1, 2, 6, -3)>= $F \cap G$

Caich 3: Ta goip hai phöông trình laii: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 0x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 8x_4 = 0 \\ 1x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases}$,

Ta dei daing tìm ñöôïc ker cuia ma traän nay lai: (1, 2, 6, -3)

==> $F \cap G = \langle fg = (1,2,6,-3) \rangle$. ¢

2.2 Chuyein ñoii cô sôi:

Baiy giôi coi coi hai cô sôi ñöôïc saip B vai B' cuia KGVT V coi chieiu lai n, caic toai ñoi trong cô sôi B vai toai ñoi trong cô sôi B' liein hei vôii nhau ra sao ?

Cui thei $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $B' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$. Ta goii $P \in M_n(R)$ lai ma train chuyein cô sôi töi B sang B', kí hieiu $P=(B \to B')$ neiu P ñöôïc thanh laip:

$P = \left[[u'_1]_B, [u'_2]_B, \ldots, [u'_n]_B \right] = P_{B \to B'}$, noii caich khaic P lai ma train coit toia ñoi cuia caic vectô cô sôi B' ñöôïc bieiu diein qua cô sôi B.

Meinh ñei: Vôii caic giai thieit ôi trein ta coi caic khaing ñònh sau:

i/ $(B \to B) = I_n$.

ii/ $(B \to B'') = (B \to B') \times (B' \to B'')$.

iii/ $(B \to B') = (B' \to B)^{-1}$.

Ví dui1:

Trong R^2, vôii cô sôi $B' = \{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\} = \{(2,1),(-1,1)\}$, x coi toai ñoi

$[x]_{B'}$ =(1,1)^T. Xeit cô sôi khaic: $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = \{(0,1),(1,0)\}$. Tìm toai ñoi môii $[x]_B$ cuia x trong cô sôi B.

sinh viein haiy chöing minh B', B ôi ñaiy lai 2 cô sôi cuia R^2.

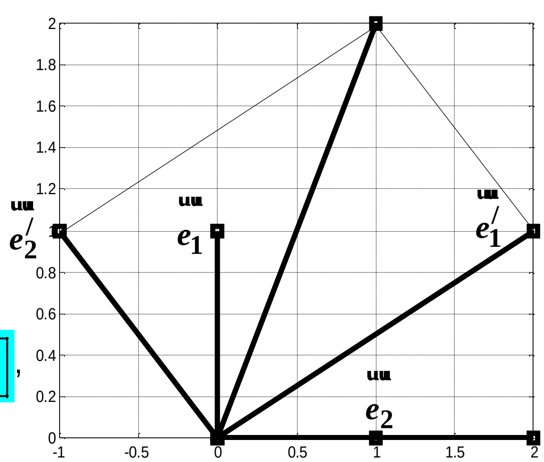
Do $x = 1\vec{e'_1} + 1.\vec{e'_2} = \vec{e'_1} + \vec{e'_2} =$

$=(1\vec{e_1} + 2.\vec{e_2}) + (1\vec{e_1} - 1.\vec{e_2}) =$

$=(2\vec{e_1} + 1.\vec{e_2})$, vaiy toai ñoi $[x]_B$ cuia x trong cô sôi B lai (2,1)^T.

Caich khaic: $\boxed{[x]_B = P_{B \to B'} [x]_{B'}}$,

$P_{B \to B'} = P_{B \to E} . P_{E \to B'}$



$$P_{B\to E} = P_{E\to B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

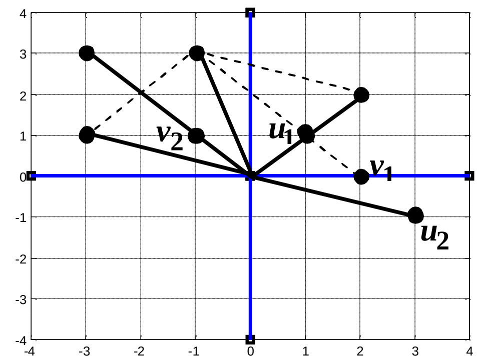
$$[x]_B = P_{B\to B'}[x]_{B'} = P_{E\to B}^{-1}P_{E\to B'}[x]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

_Ví du 4:_ Trong R^2, vôi cô sô $U = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \{(1,1),(3,-1)\}$,

x co toa ño $[x]_U = (2, -1)^T$. Xet cô sô khac:

$V = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{(2,0),(-1,1)\}$.

Tìm toa ño môi cua $[x]_V$ trong cô sô V.



Cach 3: Ta lay cô sô chính tac E lam cô sô trung gian.

$P_{E\to U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P_{E\to V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$P_{V\to U} = P_{V\to E}\,.\,P_{E\to U} = \left(P_{E\to V}\right)^{-1}.\,P_{E\to U} \Longrightarrow$$

$$\boxed{[x]_V = P_{V\to U}[x]_U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

¢

_Ví du 5:_

Trong R^3, vôi cô sô $U = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\} = \{(1,0,1),(1,3,-1),(0,1,2)\}$, x co toa ño $[x]_U = (2, -1, 5)^T$. Xet cô sô khac:

$$V = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\} = \{(1,2,0),(0,1,-1),(-1,0,1)\}.$$

Tìm toa ño môi cua x trong cô sô V.

Cach 2: Ta lay cô sô chính tac E lam cô sô trung gian.

Ta lay cô sô trung gian la cô sô chính tac:

$E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Bang ngon ngö ma tran ta co:

Ma tran chuyen tö cô sô E $\to$ V la ma tran: $P_{E\to V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma tran chuyen tö cô sô E $\to$ U la ma tran: $P_{E\to U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vay ma tran chuyen cô sô V $\to$ U la tích hai ma tran:

$$P_{V\to U} = P_{V\to E}\;P_{E\to U} = P_{E\to V}^{-1}\;P_{E\to U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \frac{-4}{3} & 1 & -1 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vay toa ño $[x]_V$ trong cô sô môi V la:

$$[x]_V = P_{V\to U}[x]_U = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \frac{-4}{3} & 1 & -1 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{-26}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix} \quad ¢$$

ANH XA TUYEN TÍNH (AXTT)

BAI 1: ANH XA TUYEN TÍNH

1.1 Ñònh nghóa:

Cho V, W la hai KGVT, $f: V \to W$ ñöôc goi la AXTT neu:

i/ f(u+v) = f(u) +f(v), $a \in R, u, v \in V$

ii/ f(α u) = α f(u).

<u>Nhan xet:</u>

a/ f(0)= f(u-u)= f(u) -f(u)=0.

b/ Ñat L(V,W) tap tat ca cac AXTT tö V vao W. Tren L(V,W) ta trang bò phep cong va nhan vo höông nhö sau:

i/ (f+g)(u)= f(u)+g(u)

ii/ (α f)(u)= α f(u).

Thì L(V,W) la KGVT tren R.

<u>*Ví du1:*</u> $f: R^2 \to R^3$

$(x, y) \to (2x + y, y, 3x - y)$ la mot AXTT tren R^2.

Sinh vien tö kiem chöng hai tính chat tren.

<u>Nhan xet:</u> Vay muon xac ñònh AXTT $f: V \to W$ ta hay xac ñònh cac anh cua vectô cô sô cua V.

<u>*Ví du2:*</u> $f: R^2 \to R^3$ la AXTT thoa f(1,0) =(1,2,3), f(0,1) =(-1,0,2).

khi ño: $f(x, y) = f\left[x(1,0) + y(0,1)\right] = xf(1,0) + yf(0,1) =$

$= x(1, 2, 3) + y(-1, 0, 2) = (x - y, 2x, 3x + 2y)$.

1.2 Nhan va anh cua anh xa tuyen tính

<u>*Menh ñe:*</u> $f: V \to W$ la AXTT, khi ño:

i/ Neu E la khong gian con cua V thì f(E) la khong gian con cua W.

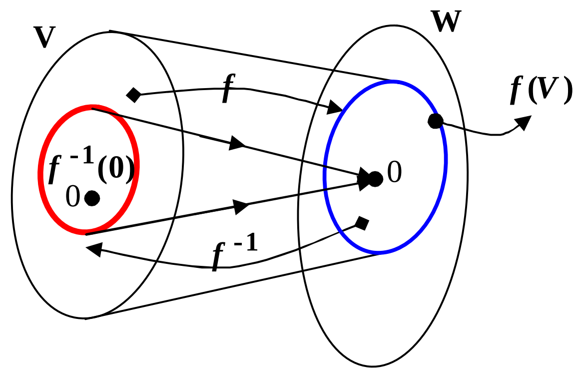
ii/ Neu F la khong gian con cua W thì f^{-1}(F) la khong gian con cua V.

Ñac biet ta co:

• Ker(f) = $f^{-1}(0) = \{x \in V : f(x) = 0\}$

ñoc la nhan cua f va

dim(Ker(f)) = soá khuyeát cuûa f.



- $\boldsymbol{Im(f) = f(V) = \{f(x) : x \in V\}}$

ñöôïc laø khoâng gian aûnh cuûa f.

Caû hai laø hai khoâng gian con ñaëc bieät.

Chuù yù: $\boldsymbol{f : V \to W}$, f toaøn aùnh <==> $\boldsymbol{f(V) = W}$.

<u>*Meänh ñeà:*</u> $\boldsymbol{f : V \to W}$. khi ñoù f ñôn aùnh neáu vaø chæ neáu ker(f)=0.

<u>*Ñònh lyù:*</u> $\boldsymbol{f : V \to W}$, neáu V laø khoâng gian höõu haïn chieàu thì ker(f), im(f) cuõng huõu haïn chieàu, ñoàng thôøi ta coù

dimKer(f) +dim Im(f) = dimV

<u>*Ñònh lyù:*</u> Cho AXTT $\boldsymbol{f : V \to W}$.

$\boldsymbol{f}$ laø toaøn aùnh <==> Im(f)= $\boldsymbol{f(V) = W \Leftrightarrow \dim f(V) = \dim W}$

Vaø deã daøng ta suy ra caùc <u>ñieàu kieän caàn</u> sau:

- Cho AXTT $\boldsymbol{f : R^n \to R^m}$ laø ñôn aùnh thì $\boldsymbol{n}$ £ $\boldsymbol{m}$.
- Cho AXTT $\boldsymbol{f : R^n \to R^m}$ laø toaøn aùnh ($\boldsymbol{f(R^n) = R^m}$) thì $\boldsymbol{n}$ ³ $\boldsymbol{m}$.
- Cho AXTT $\boldsymbol{f : R^n \to R^m}$ laø song aùnh thì $\boldsymbol{n = m}$.

- Ví duï 1: $\boldsymbol{f : R^3 \to R^3}$, $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x - 2y + z,\ 2x - 4y + z,\ z)}$

  khoâng toaøn aùnh, cuõng khoâng ñôn aùnh do, Duøng PBÑSC ta coù:

  $$f := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{-->} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ => dim(Imf)=2, dim(kerf)=1.

- Ví duï 2: $\boldsymbol{f : R^4 \to R^3}$, $f := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1-m & 1 \\ 1 & -4 & 5-m & 3-m \\ 1 & -2-2m & 1+3m & 1-m \end{bmatrix}$

  Duøng PBÑSC ta coù:---> $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1-m & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & m^2-3m \end{bmatrix}$

  Vaäy ñeå f toaøn aùnh <==> $\boldsymbol{m}$ ¹ $\boldsymbol{0, m}$ ¹ $\boldsymbol{3}$

- Ví duï 3: $\boldsymbol{f : R^3 \to R^3}$, $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x - y + z,\ x - 4y + mz,\ mx)}$,

  trong ñoù m laø tham soá. Duøng PBÑSC ta coù:

  $$f := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m \\ m & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{-->.....-->} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & m-1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3}m + \frac{1}{3}m^2 \end{bmatrix}$$

  muoán f ñôn aùnh (==> toaøn aùnh) thì tham soá $\boldsymbol{m}$ ¹ $\boldsymbol{0, m}$ ¹ $\boldsymbol{4}$.

1.3 Ma traän bieåu dieãn AXTT.

Trong phan ta chæ xet cac KGVT la höu han chieu, ta qui öôc $V=V_n$ la KGVT co dim(V)=n va $W=W_m$ la KGVT co dim(W)=m.

Ñònh nghóa:

- Cho $V=V_n$ co cô sôû $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $W=W_m$ co cô sôû $B'=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$, nhö ña biet ô menh ñe tren $f:V_n\to W_m$ ñöôc xac ñònh khi ta xac ñònh cac anh cua vectô cô sô cua V.
- Ma tran thuoc $M_{m,n}(R)$ co cot thö j la vectô $\left[f(u_j)\right]_{B'}$, $j=\overline{1,n}$ ñöôc goi la ma tran bieu dien AXTT f theo cap cô sô B, B', kí hieu $[f]_B^{B'}$.

Cu the:

$$\begin{aligned}
f(u_1)&=a_{11}v_1+a_{21}v_2+a_{31}v_3\ldots+a_{m1}v_m\\
f(u_2)&=a_{12}v_1+a_{22}v_2+a_{32}v_3\ldots+a_{m2}v_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (*)\\
f(u_j)&=a_{1j}v_1+a_{2j}v_2+a_{3j}v_3\ldots+a_{mj}v_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(u_n)&=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+a_{3n}v_3\ldots+a_{mn}v_m
\end{aligned}$$

thì $$[f]_B^{B'}=\left[\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}\right]$$

Ví du1: Xem $f:B\subset R^2\to D\subset R^3$,

vôi $B=\langle(2,0),(1,4)\rangle$, $D=\langle(1,0,0),(0,-2,0),(1,0,1)\rangle$ va:

$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{f}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=f_1$, $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\xrightarrow{f}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=f_2$, tìm ma tran $[f]_B^D$.

Giai:

De dang suy ra B va D la 2 cô sô cua R^2, R^3.

Ñau tien chu y $[f]_B^{E_3}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&0\end{bmatrix}$ vì hien nhien ta co:

$$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=(1,1,1)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)$$

$f\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=(1,2,0)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+0(0,0,1)$. Bay giô ta tìm $[f]_B^D$.

Ta co: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+1.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-1.\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Vay theo ñònh nghóa: $[f]_B^D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ñònh ly: Vôi nhöng kí hieu tren ta co: $\boxed{[f(u_B)]_{B'} = [f]_B^{B'}[u]_B}$

Ví du 4: Trong R^2 vôi cô sô chính tac $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ co:

f(x,y)=(3x-y, -2x-7y), u=(2,1). Tìm f(u), kerf, imf

Ta co $[f]_{E_2}^{E_2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$, va [u]=$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[f(u)] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \end{bmatrix}$

Vay f(u) =(5, -11)^T. Ta co the nghiem lai: Ker(f)={0}, dimKer(f)=0, rank($[f]$) =2, ta phan tích ñe co: $\mathrm{Im}\, f = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$, that vay:

$f(x,y) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) =$

$= (3x - y, -2x - 7y) = x(3,-2) + y(-1,-7) = xf(e_1) + yf(e_2)$

Vay: $f(e_1) = (3,-2), f(e_2) = (-1,-7)$ Þ $imf = \langle (3,-2),(-1,-7) \rangle$

Ví du 6: Xac ñònh: $f: R^3 \to R^3$ ñe $f(u_i) = v_i, i = \overline{1,3}$, trong ño:

$u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)$

$v_1 = (0,2,2), v_2 = (2,0,2), v_3 = (2,4,6)$.

Tìm ma tran cua bieu dien f trong cô sô chính tac.

Cach khac: Xin xem cong thöc phan sau: $\boxed{[f]_E^E = P_{E\to V}[f]_U^V P_{U\to E}}$,

Vì $f(u_i) = v_i, i = \overline{1,3}$ nen $[f]_U^V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$, $P_{E\to V} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$P_{U\to E} = P_{E\to U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ .Vay $[f]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Cach khac: Xin xem cong thöc phan sau: $\boxed{[f]_E^E = P_{E\to E}[f]_U^E P_{U\to E}}$,

Vì $f(u_i) = v_i, i = \overline{1,3}$ nen $[f]_U^{E_3} = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $P_{E\to E} = I_3$

$P_{U\to E} = P_{E\to U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ .Vay $[f]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ ¢

Ví du 7: Cho $f:$ ¡^{4} ® ¡^{3} khao sat cau truc f vôi

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2+x_3,\ 2x_1+x_4,\ 2x_2+x_3+x_4)$. Tìm cô sô va so chieu cua ker(f), Imf, tìm $u \in \mathbb{R}^4$, sao cho: $f(u)=(1,\ -1,\ 0)$.

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in Kerf \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2+x_3 &=0\\ 2x_1 \qquad +x_4 &=0 \\ \quad 2x_2+x_3+x_4 &=0\end{cases} \Leftrightarrow [f]_{E_4}^{E_3}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$, Kerf=$\langle(-1,-1,0,2)\rangle$, dim(kerf)=1

$\mathbf{Im}\, f=\langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\rangle$, ta co

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2+x_3,\ 2x_1+x_4,\ 2x_2-x_3+x_4)=$

$= f = x_1(1,2,0)+x_2(-1,0,2)+x_3(1,0,1)+x_4(0,1,1)$. Vậy

$f(e_1)=(1,2,0)$, $f(e_2)=(-1,0,2)$, $f(e_3)=(1,0,1)$, $f(e_4)=(0,1,1)$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$,vay $2f(e_4)=f(e_1)+f(e_2)$

Va $\mathbf{Im}\, f=\langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle=\langle f(e_1), f(e_3), f(e_4)\rangle=$........

Vay dimImf=3=dim(R^3), nen f toan anh, va tat nhien khong ñôn anh.

$$f(u)=(1,\ -1,\ 0)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \dots\to \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3\end{array}\right]$$

Vay $u=(y,y,1,-1-2y)$, $\forall y \in R$

Ví du 8: Cho $f: R^3 \to R^3$, cô sô $\{u\}$ la

$u_1=(1,2,-1), u_2=(0,2,-1), u_3=(1,-2,0)$ va co

$f(u_1)=v_1=(1,1,2), f(u_2)=v_2=(-1,0,2), f(u_3)=v_3=(-3,-2,-2)$.

Tìm kerf va Imf.

•Ta tìm kerf trong cô sô $\{u\}$: ta co $[f]_U^{E_3}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$. Dung PBÑSC

ta co $\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ =>Kerf=< m=(2,-1,1) >

Chuyen sang cô sô chính tac: u.m = $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$

Vay Kerf= <(3, 0, -1)>. nen f khong ñôn anh, va khong toan anh.

Caùch khaùc: tìm $[f]_{E_3}^{E_3} = [f]_U^{E_3} P_{U\to E_3} = [f]_U^{E_3}.u^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 5/2 & 6\\ 1 & 3/2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ vaø tìm ker cuûa ma traän naøy, ta cuõng coù keát quaû töông töï: :Kerf= <(3, 0, -1)>.

•Tìm Imf: Vì $\langle f(u_1), f(u_2), f(u_3)\rangle = \langle f(u_1), f(u_2)\rangle$ neân

Imf=$\langle f(u_1) = v_1 = (1,1,2), f(u_2) = v_2 = (-1,0,2)\rangle$

Neáu chuyeån sang cô sôû chính taéc, ta coù:

Imf=$\langle f(e_1) = (2,1,0), f(e_2) = (5/2, 3/2, 1)\rangle$

Hieån nhieân: $\langle f(u_1), f(u_2)\rangle = \langle f(e_1), f(e_2)\rangle$ ¢

Ví duï3: Trong R^2, $f: R^2 \to R^2$, trong $v = \{v_1 = (1;1), v_2 = (-1;-2)\}$ cho $[f]_v = [f]_v^v = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, vaø $[d]_v = (2,1)$, tìm $\left[f^{-1}(d)\right]_{E_2}$

Giaûi:

$$\left[f^{-1}(d)\right]_v = \left[f^{-1}\right]_v^v [d]_v = \left(\left[f\right]_v^v\right)^{-1}[d]_v = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\ 2.5\end{bmatrix} \Longrightarrow \left[f^{-1}(d)\right]_{E_2} = P_{E_2\to v}\left[f^{-1}(d)\right]_v =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 2.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5.5\\ -8\end{bmatrix}$$

Caùch khaùc:

$\left[f^{-1}(d)\right]_{E_2} = \left[f^{-1}\right]_{E_2}^{E_2}[d]_{E_2}$, trong ñoù $[d]_{E_2} = P_{E_2\to v}[d]_v$

$\left[f^{-1}\right]_{E_2}^{E_2} = P_{E_2\to v}\left[f^{-1}\right]_v^v [P]_{v\to E_2}$, $P_{E_2\to v} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

$\left[f^{-1}\right]_v^v = \left([f]_v^v\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$, Vaäy

$$\left[f^{-1}(d)\right]_{E_2} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-5.5\\ -8\end{bmatrix}$$ ¢

1.5 Chuyeån ñoåi cô sôû.

$\boxed{[f]_U^V = P_{V\to Y}[f]_X^Y P_{X\to U}}$, trong ñoù cô sôû $X\to U$ trong V_n, vaø cô sôû $Y\to V$ trong W_m.

Ví duï4: Goïi E_2, E_3, laø cô sôû chính taéc cuûa R^2, R^3, coù

Xeùt AXTT $f: R^2 \to R^3$, $(x,y) \mapsto (2x+y, y, 3x-2y)$ thì $[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$

B={(2,3), (3,4)}, C={(1,1,2), (1,4,-5), (0,3, -1)} la cô sô môi cua R^2, R^3, tìm ma tran cua AXTT f, khi ta chuyen $E_2 \to B$, $E_3 \to C$.

Ta co: P=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, Q=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. Vay

$$[f]_B^C = Q^{-1}[f]_{E_2}^{E_3} P = \begin{bmatrix} \frac{11}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{18} & \frac{-1}{18} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-13}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{9} & \frac{13}{2} \\ \frac{23}{9} & \frac{7}{2} \\ \frac{-35}{9} & \frac{-11}{2} \end{bmatrix}$$

Ví du 5: Xem lai ví du phan tren $f : B \subset R^2 \to D \subset R^3$,

vôi $B = \langle (2,0),(1,4) \rangle$, $D = \langle (1,0,0),(0,-2,0),(1,0,1) \rangle$ va:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = f_2,$$

a/ Tìm ma tran $[f]_B^D$.

b/ Cho $C = \langle (1,2,-2),(-1,2,1),(1,-1,1) \rangle$ tôi $[f]_B^D$ tính $[f]_B^C$, $[f]_{E_2}^{E_3}$.

c/ Tìm kerf, Imf. Cho $[d]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tìm $[f(d_B)]_D$, $\left[f(d_{E_2})\right]_{E_3}$

d/ Trong cô sô chính tac cho $W = \{2x_1 + 3x_2 = 0\}$, tìm cô sô cua f(W) trong D va f(W) trong E_3.

e/ Cho $[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ thoa $W = \{2x_1 + 3x_2 = 0\}$, tìm $[f(W)]_D$, $[f(W)]_{E_3}$

nghóa la tìm cô sô cua f(W) trong D va f(W) trong E_3

f/ Tìm dien tích 2 hình bình hanh cua 2 cap (b_1, b_2) va (f_1, f_2), co nhan xet gì ?

Giai:

a/ $[f_1]_D = P_{D \to E}[f_1]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$[f_2]_D = P_{D \to E}[f_2]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vay $[f]_B^D = \left[[f_1]_D \quad [f_2]_D \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Cach khac: $[f]_B^D = P_{D \to E_3}[f]_B^{E_3} P_{B \to B} = P_{E_3 \to D}^{-1}[f]_B^{E_3}$

Vôùi $[f]_B^{E_3} = \left[\begin{array}{c|c}1&1\\1&2\\1&0\end{array}\right]$. Vaäy $[f]_B^D = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\left[\begin{array}{c|c}1&1\\1&2\\1&0\end{array}\right] = \begin{bmatrix}0&1\\ \frac{-1}{2}&-1\\1&0\end{bmatrix}$

b/ $[f]_B^C = P_{C\to D}[f]_B^D P_{B\to B} = P_{C\to E}P_{E\to D}[f]_B^D =$

$$= \begin{bmatrix}1&-1&1\\2&2&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\ \frac{-1}{2}&-1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{11}{9}&\frac{8}{9}\end{bmatrix}$$

Caùch tröïc tieáp: $[f_1]_C = P_{C\to E}[f_1]_E = \begin{bmatrix}1&-1&1\\2&2&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{9}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{11}{9}\end{bmatrix}$

$[f_2]_C = P_{C\to E}[f_2]_E = \begin{bmatrix}1&-1&1\\2&2&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{8}{9}\end{bmatrix}$.

Vaäy $[f]_B^C = \big[[f_1]_C \quad [f_2]_C\big] = \begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{11}{9}&\frac{8}{9}\end{bmatrix}$

$[f]_{E_2}^{E_3} = P_{E_3\to E_3}[f]_B^{E_3}P_{B\to E_2} = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&4\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&1\\4&3\\4&-1\end{bmatrix}$

c/ Töø $\begin{bmatrix}4&1\\4&3\\4&-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}4&1\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$ ==> Kerf=0 ==> f ñôn aùnh, taát nhieân vì n=2<m=3 neân f khoâng toaøn aùnh,

tìm Imf: Imf= $\left\langle \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle f_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\rangle$

Cho $y \in \mathrm{Im}\, f$, nhö $y = 1.f_1 - 2.f_2$=[1,-3,1]^T, ñeå tìm ra f^{-1}(y)=[0,-8]^T? Nhöng neáu $y \notin \mathrm{Im}\, f \to f^{-1}(y) = \emptyset$, nhö y= [1,-2,1]^T $\notin \mathrm{Im}\, f$

$[f(d)]_{E_3} = [f]_{E_2}^{E_3}[d]_{E_2} = [f]_{E_2}^{E_3}P_{E_2\to B}[d]_B =$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&1\\4&3\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$[f(d_B)]_D = [f]_B^D [d]_B = = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$. Hay co the tính:

$$[f(d)]_D = P_{D \to E_3} [f(d)]_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

d/ $W_{E_2} = \langle (-3,2) \rangle \Rightarrow f(W)_{E_3} = [f]_{E_2}^{E_3} [W]_{E_2} = \left\langle \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \right\rangle$

Cac phan con lai SV tö giai.

f/Dien tích hình bình hanh cap $(b_1, b_2) = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right| = 8$

Dien tích hình bình hanh cap $(f_1, f_2) = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \sqrt{(-2,1,1)} = \sqrt{6}$

$$[f]_{E_2}^{E_3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow \left| [f]_{E_2}^{E_3} \right| = \sqrt{ \begin{vmatrix} \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{-1}{8} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{-1}{8} \end{vmatrix}^2 } = \sqrt{\frac{384}{64^2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$ coi nhan xet gì ? ¢

Phan 3:
Cheo hoa dang toan phöông

1. Cheo hoa dang toan phöông trong R^2 bang pp Lagrange:
2. Cheo hoa dang toan phöông trong R^2 bang pp Jacobi:
3. Cheo hoa dang toan phöông trong R^2 bang pp phep ñoi tröc giao:

Ví du:

$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fxy + 2Exz + 2Dyz + [2Gx + 2Hy + 2Iz] + J = 0.$

thì töông tö, nhöng phöc tap hôn.

$$f(x,y,z) = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} A & F & E & G \\ F & B & D & H \\ E & D & C & I \\ G & H & I & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$, bien $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = U$

Ví du1: $f = -2x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 2x + 4y - 6z + 9 = 0$

Ta coi: $f = [x \quad y \quad z \quad 1] \Delta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$,

Neu f ñöôc viet lai theo Lagrange:

f= $-2\left[1.x+\frac{1}{2}.y-\frac{1}{2}.z-\frac{1}{2}.1\right]^2-\frac{5}{2}\left[0.x-\frac{3}{5}.y+1.z+1.1\right]^2+\frac{27}{5}y^2+12$=0

ñat bien ñe: $f=-2X^2-\frac{5}{2}Y^2+\frac{27}{5}Z^2+12=0$. Ñat:

$$\begin{cases} X=1.x+\frac{1}{2}.y-\frac{1}{2}.z-\frac{1}{2}.1 \\ Y=0.x-\frac{3}{5}.y+1.z+1.1 \\ Z=0.x+1.y+0.z+0.1 \\ 1=0.x+0.y+0.z+1.1 \end{cases},\quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}=b\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-3}{5} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P=b^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^T D P=\begin{bmatrix} -2 & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{27}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

vay $f=U^T\left[P^TAP\right]U=-2X^2-\frac{5}{2}Y^2+\frac{27}{5}Z^2+12=0$

Ví du2: $f=-x^2+3y^2+5z^2+2xy+2xz+3yz+2x+4y-6z+9=0$

$=\left[-x^2+2xy+2xz+2x\right]+3y^2+5z^2+3yz+4y-6z+9=$

$=-\left[x^2-2x(y+z+1)\right]+....$

$=-\left\{(x-[y+z+1])^2-\left[y^2+z^2+1+2yz+2y+2z\right]\right\}+...$

$=-(x-[y+z+1])^2+\left[y^2+z^2+1+2yz+2y+2z\right]+$

$+3y^2+5z^2+3yz+4y-6z+9=$

$=-(x-[y+z+1])^2+\left[4y^2+6z^2+5yz+6y-4z+10\right]=$

$=-(x-[y+z+1])^2+\left[6z^2+5yz-4z+4y^2+6y+10\right]=$

$\Rightarrow$ Khai trien ngoac vuong

- $6z^2+5yz-4z+4y^2+6y+10=6\left[z^2+2z\frac{(5y-4)}{12}\right]+...=$

$=6\left\{\left[z+\frac{(5y-4)}{12}\right]^2-\left[\frac{(5y-4)}{12}\right]^2\right\}+...$

$=6\left[z+\frac{5y}{12}-\frac{1}{3}\right]^2-\frac{1}{24}\left[25y^2-40y+16\right]+4y^2+6y+10=$

$=6\left[z+\frac{5y}{12}-\frac{1}{3}\right]^2+\frac{71}{24}y^2+\frac{23}{3}y+\frac{28}{3}$

- $\frac{71}{24}y^2+\frac{23}{3}y+\frac{28}{3}=\frac{71}{24}\left[y+\frac{92}{71}\right]^2+\frac{310}{71}$. Cuoi cung

$$f = -\left(x - y - z - 1\right)^2 + 6\left(z + \frac{5y}{12} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{71}{24}\left(y + \frac{92}{71}\right)^2 + \frac{310}{71}$$

vay $f = U^T \left[P^T A P\right] U = -X^2 + 6Y^2 + \frac{71}{24}Z^2 + \frac{310}{71} = 0$

<u>*Ví du 4:*</u> Dang toan phöông (quadric) trong R^3: $f = -2x^2 + 4y^2 - 3z^2 - xy + 2xz + 3yz$

Neu bien f ve dang chính tac Lagrange: $f = -2\left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(z - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}y^2$

Hay tìm cac ma tran P, [f], $A^{/}$ sao cho : P^T[f]P= $A^{/}$, trong ño $A^{/}$ la dang cheo.

<u>*Ví du 4:*</u> Dang toan phöông (quadric) trong R^3: $f = -4x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy + xz + 5yz$

Neu bien f ve dang chính tac Lagrange: $f = 3\left(y + \frac{x}{2} - \frac{5z}{6}\right)^2 - \frac{19}{4}\left(x + \frac{3z}{19}\right)^2 - \frac{340}{57}y^2$

Hay tìm cac ma tran P, [f], $A^{/}$ sao cho : P^T[f]P= $A^{/}$, trong ño $A^{/}$ la dang cheo.

---------------------------------------Một số đề thi mẫu

Trường ĐHCN Tp.HCM

Đề số 1

Bài 1. (3đ) Trong R^3, với cơ sở chính tắc, cho $\alpha_1=(1, -2, -3)$, $\alpha_2=(1, -1, 1)$, $\alpha_3=(-2, -1, 3)$.

a/ Cho biết $F=\{a_1, a_2, a_3\}$ và x=(3, -3, -14), tìm $[x]_F$

b/Cho biết $B=\{a_1, a_2\}$, là cơ sở của $W=\langle a_1, a_2\rangle$, và y=(1, 2, 13) $\in W$, tìm $[y]_B$

c/Cho F= < $\alpha_1=(1, -2, -3)$, $\alpha_2=(1, -1, 1)$, y=(1, 2, 13) >, G= < (3, -2, -3), (1, 2, 4) >

Tìm một cơ sở của $F \cap G$

Bài 2. (1đ) Trong R^4, với cơ sở $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ của $W=\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle=\langle \vec{u}_1=(3, 1, 1, -2), \vec{u}_2=(3, -1, 2, -3)\rangle$. Cho biết một cơ sở khác của W là $B'=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}=\{\vec{v}_1=(3, 5, -1, 0), \vec{v}_2=(6, -4, 5, -7)\}$. Cho x $\in$ W thỏa: $[x]_B=[-3 \quad 5]^T$. Tìm $[x]_{B'}$.

Bài 2. Trong R^4, với cơ sở $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ của $W=\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\rangle=\langle \vec{u}_1=(1,1,-3,-2), \vec{u}_2=(2,-2,0,-3), \vec{u}_3=(-1,1,1,-2)\rangle$. Cho biết một cơ sở khác của W là $B'=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}=\{\vec{v}_1=(-5, 11, -7, -1), \vec{v}_2=(-1, 7, -11, 7), \vec{v}_3=(2, -8, 8, 2)\}$.

Cho x $\in$ W thỏa: $[x]_B=[-1 \quad 2 \quad 3]^T$. Tìm $[x]_{B'}$.

Bài 3. (1đ) Trong cơ sở chính tắc cho AXTT $f: R^3 \to R^3$, có: $f:=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$B=\{w_1=(1,-2,1), w_2=(2,2,-2)\}$ là cơ sở của $W=\langle w_1, w_2\rangle$.

Cho $[f(w_3)]_B$ =[7, -12]^T. Biết rằng W bất biến đối với f (tức $f(W)=W$), và f có nghịch đảo

Hãy tìm tọa độ của w_3 trong không gian W (tức tìm $[w_3]_B$)=[-3, 2]^T

Bài 3. (1đ) Trong cơ sở chính tắc cho AXTT $f: R^3 \to R^3$, có: $f:=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$B=\{w_1=(1,-2,1), w_2=(2,2,-2)\}$ là cơ sở của $W=\langle w_1, w_2\rangle$.

Cho $[w_3]_B$ =[-3, 2]^T. Biết rằng W bất biến đối với f (tức $f(W)=W$). Hãy tìm tọa độ của $f(w_3)$ trong không gian W (tức tìm $[f(w_3)]_B$ =[7, -12]^T)

Bài 3. (1đ) Trong cơ sở chính tắc cho AXTT $f: R^4 \to R^4$, có:$[f]=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & -8 & -12 & -4 \\ 0 & 42 & 69 & 0 \\ -12 & -48 & -78 & 0 \\ -10 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Với $B=\{w_1=(-1,-1,2,1), w_2=(-1,2,-2,1), w_3=(2,-3,2,-1)\}$ là cơ sở của $W=\langle w_1, w_2, w_3\rangle$.

Cho $[f(w_4)]_B$ =[-23, 11, -13]^T. Biết rằng W bất biến đối với f (tức $f(W)=W$), và f có nghịch đảo. Hãy tìm tọa độ của w_4 trong không gian W (tức tìm $[w_4]_B$)=[4, -2, 1]^T [-23, 11, -13]

Bài 3. (1đ) Trong cơ sở chính tắc. Cho dạng tòan phương (mặt quadric) trong R^3:

$$f(x,y,z) = 1 + 16x - 6y - 10y^2 + 32xz - 5z^2 + 10xy + 46z + x^2 - 26yz$$

a/ Lấy thứ tự biến là (y, z, x), và trong cơ sở chính tắc, tìm ma trận A biểu diễn dạng toàn phương $f(x,y,z)$, để $f = X^T AX$, với $X^T = [y \quad z \quad x]$.

b/ Nếu đưa $f(x,y,z)$ về dạng chính tắc Lagrange như sau:

$f(x,y,z) = (x + 16z + 5y + 8)^2 - 261\left(z + \frac{31y}{87} + \frac{35}{87}\right)^2 - \frac{54}{29}(y+3)^2 - 4$. Hãy đổi biến, và viết dạng chéo của $f(x,y,z)$ trong cơ sở mới. Từ đây hãy tìm các ma trận P, A' sao cho : $P^TAP = A'$, trong đó A' là dạng chéo.

Xem E:\GiaoTrinhToan\Toan DaiHoc A21\De Thi C2 Tien Tien\De Cuong Thi A2-C2

Bài 4. (2đ) Bài toán thường thấy trong kỹ thuật, là tìm tọa độ trọng tâm C của tứ giác ABCD phẳng, qua các công thức sau: $x_C = \frac{1}{S}\iint_{ABCD} x\,dxdy$, $y_C = \frac{1}{S}\iint_{ABCD} y\,dxdy$, trong đó S là diện tích của tứ giác ABCD. Cho biết các tọa độ các đỉnh: A(0, 1), B(3, 0), C(4, 1) , D(1, 3).

Bài 5. (2đ) Tìm các điểm cực trị của hàm: (cuc tieu)

$$f(x,y,z) = 6x^2 + 22y^2 + 9z^2 - 2xy - 12xz - 14yz + 34y - 12z + 10$$

và các giá trị hàm tương ứng với các điểm cực trị trên.

Bài 5. (2đ) Tìm các điểm cực trị của hàm: (cuc Dai)

$$f(x,y,z) = 1931 + 4x + 20y - 22yz + 28xy + 2xz - 10x^2 + 38z - 26y^2 - 15z^2$$

và các giá trị hàm tương ứng với các điểm cực trị trên.

Bài 6. (1đ). Cho hàm $f(x_1,x_2) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 20x_1 + 18x_2^2 - 102x_2$, với ràng buộc

$\varphi(x_1,x_2) = 5x_1 - 12x_2 + 75 = 0$. Tìm các điểm cực trị của $f(x_1,x_2)$ và các giá trị hàm tương ứng với các điểm cực trị trên.

Bài 6. (1đ). Cho hàm $f(x_1,x_2) = 3x_1 - 4x_2$, với ràng buộc

$\varphi(x_1,x_2) = 8x_1x_2 + 16x_1 - 8x_2^2 + 24x_2 + 104 = 0$. Tìm các điểm cực trị của $f(x_1,x_2)$ và các giá trị hàm tương ứng với các điểm cực trị trên.

Bài 6. (1đ). Cho hàm $f(x_1,x_2) = -31x_1 + 17x_2 + 27 + 9x_1^2 - 12x_2x_2 + 4x_2^2$, với ràng buộc

$\varphi(x_1,x_2) = 9x_1^2 - 12x_1x_2 - 11x_1 + 4x_2^2 + 11x_2 + 2 = 0$. Tìm các điểm cực trị của $f(x_1,x_2)$ và các giá trị hàm tương ứng với các điểm cực trị trên.

Người giới thiệu đê